Inhalt

Der Mathematik-Unterricht der 5. Klasse

Der Übergang vom 4. zum 5. Schuljahr

Nimmt man die in der Waldorfpädagogik betonten Jahrsiebte als generalisierenden und nicht den Einzelfall beschreibenden Entwicklungsrhythmus, so lassen sich über den Jahrgangsverbund hinweg gemeinsame Stufen charakterisieren. Innerhalb des zweiten Jahrsiebts, also der Klassenlehrerzeit, sind es die Drittelmarkierungen, in deren Umgebung entscheidende Übergänge stattfinden. Diesen wird in der Waldorfpädagogik besondere Beachtung geschenkt, sowie in Inhalt und Form des Unterrichts berücksichtigt. Der erste große Einschnitt ist der häufig so genannte *Rubikon* bei etwa $9^1/_3$ Jahren. Mit dessen Überschreiten nimmt das Kind in der 3. Klasse schlaglichtartig sein Eigensein wahr als spürbaren Bruch zur umgebenden Welt mit all den damit verbundenen Krisen.

Aber gerade dadurch wird ein großer Entwicklungsschritt möglich, nämlich ein völlig neues Verhältnis des Kindes zu seiner Umwelt: Es kann nun distanzierter auf die Naturerscheinungen blicken und sie damit aufmerksamer betrachten. Das mythische Bewusstsein, das eine klare Trennung von Selbst und Umwelt noch verhindert, lässt die Welt in den unterschiedlichsten Bildern (Imaginationen) auffassen. Der Verlust dieses mythischen Bewusstseins kann als eine *Vertreibung aus dem Paradies* verstanden werden. Dafür erwacht nun die Fähigkeit, die Welt differenzierter zu verstehen und im aktiven Eingreifen sich mit ihr auf neue Weise zu verbinden. Damit sich das Kind im Irdischen seelisch einwurzeln kann, darf es daher eigenhändig in den Hausbau-, Ackerbau- und Handwerks-Epochen in urbildhafter Weise die Arbeitskultur des Menschen auf und an der Erde erüben und erfahren.

Die Kinder haben sich also zunächst von der umgebenden sozialen Umwelt emanzipiert, dabei sich auch von ihrem bisher als selbstverständlich erlebten Eins-Sein mit der Welt ent-zweit; sie konnten sich sogar bis zur Einsamkeit distanzieren, aber auch - daran wachsend - die Einheit des Ich als Bezug zu allem anderen Welterfahren erleben. Dies ist ein übergeordnetes Motiv, das die beiden Klassen 4 und 5 als Zäsur auf dem Weg von der Kindheit zur Jugendzeit heraushebt. Das zugehörige Lebensalter liegt wie ein Waagebereich mittig zwischen physischer Geburt und Ich-Geburt mit erreichter Autonomie und Selbstverantwortung[1]. Es ist das mittlere Drittel des mittleren Jahrsiebts, in dem auch unter menschenkundlicher Betrachtung die *leiblich-organische Mitte* ausgebildet wird: Stand das erste Drittel noch unter dem Signum der *Zahnreife*, so verlagert sich nun der Entwicklungsschwerpunkt auf die *Atemreife* und dann im letzten Drittel auf die *Erdenreife*. Die Umbrüche beim Eintritt in dieses mittlere Altersintervall wurden bereits als Rubikon geschildert, das Verlassen dieses Bereiches wird durch die aufwallenden Gefühlsturbulenzen der Vorpubertät signalisiert[2]: *„Normalerweise schlummern jetzt* – im 10. und 11. Lebensjahr – *die heftigen Triebe, ... es ist die Windstille vor dem Sturm der Pubertät.“*[3]

[1] Die Mitte der Kindheit (und Jugendzeit) mit 10 ½ Jahren bezieht sich darauf, dass für die völlige geistig-seelische Reifung nach wie vor die Vollendung des 21. Lebensjahr als wichtige Marke gilt. Selbst die auf 18 Jahre definierte Volljährigkeit lässt offen, ob der junge Erwachsene schon vollständig selbstverantwortlich handeln kann. So wird zum Beispiel vor Gericht (eben bis zur Grenze des 21. Lebensjahres) regelmäßig geprüft, ob noch das Jugendstrafrecht angewandt werden kann.

[2] Eine ausführliche Charakterisierung dieser beiden Schritte findet sich in: Hermann Koepke: Das neunte Lebensjahr; ebenso: Das zwölfte Lebensjahr; beide Dornach 1989

[3] E.H.Erikson in: Müller-Wiedemann, Stuttgart 1994

In dieser Zwischenzeit des 10. und 11. Lebensjahres empfindet das Kind nun die eigene „*Identität, die es möglich macht, ... innere und äußere Realität selbständig zum Ausgleich zu bringen, ... Erfahrung und Verhalten sinnvoll zu integrieren ... und Sicherheit des Gefühlsurteils zu gewinnen*“[4].

Sowohl dieses Erlebnis, als auch das Bedürfnis nach Einheit mit der Welt als Grundtenor dieses Lebensalter spiegeln sich vielfältig in autobiografischen Zeugnissen, natürlich besonders deutlich in Künstlerbiografien, wie etwa des großen Musikers und Dirigenten Bruno Walters: „*Noch sehe ich den einsamen Ort vor mir, an dem ich als etwa 10- oder 11-jähriger dies innere Erschauern erlebte, ... überwältigt von der großen Stille ... Es war meine erste Ahnung, dass ich ein ICH war, mein erstes Aufdämmern, dass ich eine Seele hatte, und dass sie gerufen wurde*“[5], oder des Malers Oskar Kokoschkas: So sah und „*lernte ich, wie die Welt ist und wie sie sein sollte, so dass sie für die Menschen wohnlich wird*“[6].

Die Stille der Reifung bedarf eines geschützten Innenraumes. Diesen hat der Lehrer mit Takt und Ehrfurcht zu respektieren, aber auch mit Substanz durch bildhafte Schilderungen zu bereichern. Besonders geeignet dazu sind die Beschreibungen der Pflanzen- und Tierkunde, sowie die geschichtlichen Erzählungen, wenn dabei jeweils der geistig-seelische Wesenskern aufleuchtet und von den Kindern tief empfindend miterlebt werden kann. Wird vom Lehrer das Unterrichtsthema aus innerer Wahrhaftigkeit und warmer Anteilnahme geschildert, beleben Inhalt und Form die Phantasie und den Schönheitssinn der Kinder.

Die bereits genannte Fähigkeit zum Ausgleich von Innenraum und Außenwelt hat auch durchaus seine leibliche Entsprechung: In keinem anderen Alter findet der eigene physische Leib, sein Bewegungsapparat und die Sinnesorganisation auf solch natürliche Weise die Übereinstimmung mit der Außenwelt. Snakeboard- und Einrad-Fahren klappen schon nach einem Dutzend Versuchen und werden dann zur Überperfektion geübt. Der gutwillig bemühte Lehrer muss meist seine kläglichen wie vergeblichen Versuche mit der durchaus richtigen Begründung relativieren, dass mit diesen Geräten schon prinzipiell kein stabiles Gleichgewicht erreichbar sein kann. Die Kinder hingegen zeigen mit ausgelassener Freude, wie der eigene Leib ungehindert innere Intensionen in äußere Bewegungsantriebe umsetzen kann, wie er als vollkommenes Werkzeug Innen- und Außenwelt verbindet. Mit körperlicher Geschicklichkeit werden dabei alle Trägheits- und Schwerekräfte (in physikalischem Sinne) beachtet, überwunden oder gar mit einmaliger Leichtigkeit überflogen: Eine glückvolle Zeit für alle Bewegungsunterrichte und von vielen Schulen für den Einstieg in die Zirkuskünste genutzt.

Die Waldorfpädagogik versucht für alle Fächer, aus dem Entwicklungsstand der Kinder auf die dazu gehörigen Lehrplananregungen zu folgern und dazu Methoden und Inhalte von den Bedürfnissen und Fähigkeiten der Kinder abzuleiten. Doch wie können die oben genannten Wesenszüge den Mathematikunterricht befruchten? Ein Mathezirkus kann vielleicht ein origineller Beitrag für die Monatsfeier sein, aber keine Lösung für den Unterricht im Schulalltag. Mathematik ist eine Geisteswissenschaft und wird im Denken erfahren, das seinerseits durch die mathematischen Formen und Inhalte gestärkt wird. Das Durchdenken von mathematischen Sätzen und der Aufbau von Beweisen erfordert dazu Willenseinsatz in der Gedankenführung. Die geschilderte Bewegungsfreude, die Phantasie und der Schönheitssinn der Kinder scheint dagegen eine völlig andere Welt zu sein. Doch lassen sich Brücken bauen: Äußere Bewegung korrespondiert immer mit innerer Beweglichkeit, ohne Phantasie lassen sich keine Rechengesetze

[4] Müller-Wiedemann a.a.O. es fehlt noch: Koepke - das 9. / 10. LJ

[5] Bruno Walter: Themen und Variationen; Frankfurt 1960

[6] Oskar Kokoschka: Mein Leben, München 1971

und Zahlenbeziehungen nachvollziehen oder gar finden, erst durch den Schönheitssinn werden gegenseitige Verhältnisse von Zahlen und Figuren zum Leben erweckt; und wenn sich der Lehrer darum bemüht, die der Mathematik im Grundsatz innewohnende Klarheit und Wahrhaftigkeit durchklingen zu lassen, wird er damit die Kinder auch innerlich erreichen.

Liegt über dem ganzen zweiten Jahrsiebt als Aufgabe die *Gefühls- und Gemütserziehung*, so gilt dies für die Zwischenzeit als mittlerem Bereich in noch gesteigertem Maße. In den ersten beiden Klassen der Unterstufe klingt das Willenshafte des ersten Jahrsiebts nach; eben weil es gut und schön ist, erleben die Kinder allen Unterricht als selbstverständliches Mittun, welches erst in der 3. Klasse hinterfragt wird. Am Ende der Mittelstufe erwacht in den beiden oberen Klassen 7 und 8 der Wunsch nach denkerischem Durchdringen auf: Sachverhalte werden auf ihre Wahrheit hinterfragt. Der Umschwung zu dieser anderen Weltbegegnung erfolgt in der 6. Klasse und findet sein treffendstes Bild in der konstruierenden Geometrie. Diese wird einmal wegen der Schönheit der Figuren geliebt, aber auch weil in deren Bildzusammenhang sich die ersten Beweise offenbaren und damit Zusammenhänge im Denken erfassbar werden.

Innerhalb dieser Zwischenzeit erobern die Kinder mit den Grundrechenarten die Dezimalzahlen und finden damit den Zugang zur Rechenwelt der Erwachsenen. Das Bruchrechnen in Klasse 4 eröffnete den Eintritt dazu und nutzte die geschilderte Entzweiung im Weltbild des Kindes als neue Fähigkeit. Letztere ermöglichte die *Trennung* des einheitlichen Ganzen in seine Bruchteile, pflegte aber gleichzeitig stets den *Rückbezug zum Ganzen*: Der Nenner erinnerte immer daran, wie viele Teile das Ganze ergeben. Die Differenz zwischen Zähler und Nenner sagte dazu, wie viele Teile gebraucht werden, um den Bruchteil wieder zu vervollständigen: 3/8 benötigen weitere 5 (= 8-3) dieser Achtel für das ursprüngliche Ganze. Eine erste Empfindung für das Verhältnis des Teils zum Ganzen, wie auch der Teile untereinander wurde ebenfalls angelegt. Sinnvoll einsetzbar wird diese Betrachtungsweise aber erst mit weiterer seelischer Reifung hin zu abwägendem Empfinden.

Die Pflege dieses *empfindenden Verstehens* geschieht in vielfältiger Weise in den Epochen der 5.Klasse, die eine Reihe neuer Motive aufrufen. Das Bestreben, die vielfältigen Details in einer wechselseitigen Beziehung zum Ganzen zu betrachten, durchzieht dabei alle Fächer als Grundtenor. Für den Klassenlehrer ist es daher hilfreich, auf den Gesamtlehrplan der Klassenstufe hinzublicken und das einzelne Fach, hier also die Mathematik, aus ihm heraus zu beleuchten.

Motive des Fächerkanons der 5. Klasse

Die in den Bewegungsmustern des Formenzeichnens vorbereitete Geometrie kristallisiert die einzelnen Grundformen der geometrischen Figuren heraus. In ihrer jeweiligen Spezialisierung und ihren eigenen Gesetzmäßigkeiten zeigen sie dennoch innere Verwandtschaften. Darin spiegeln sie stets ihren Bezug zur *universellen Grundform*. So verwirklichen Rechteck und Raute jeweils eigene Anteilnahmen an den Regelmäßigkeiten des Quadrates. Die vollkommene Symmetrie des gleichseitigen Dreiecks ist universeller Ausgangspunkt für alle Dreiecks-*Sonderformen*. Während aller Formverwandlungen bleiben jeweils einzelne Eigenschaften der Grundform erhalten, wie von selbst entdecken die Kinder daran geometrische *Gesetzmäßigkeiten*. Dieses Vorgehen lässt sich auch auf das Rechnen übertragen.

Die in der 4. Klasse beginnende Tierkunde vergleicht die Tierwelt in typischen Ausprägungen nach Gestalt und Lebensweise mit speziellen Aspekten des menschlichen Körperbaus. In der 5. Klasse geht die Naturkunde zur Pflanzenkunde über. Dabei differenziert sich der Blick aus dem Lebensumfeld zur konkreten Pflanze. Danach werden die Ausformungen der Pflanzenorgane zwar einzeln möglichst genau beschrieben, aber nicht als isolierte Teile, sondern in ihrem

Zusammenhang zum Gesamtorganismus. Statt beziehungsloser Einzelteile betrachtet man also sinnvolle Anteile am Ganzen. Darüber hinaus werden die Pflanzen nicht mehr wie in der Tierkunde auf die *Gestalt* des Menschen bezogen, sondern als Bilder seiner *seelischen* Entwicklungsstufen angesehen. An diesem Übergang kann man exemplarisch verstehen, was in allen anderen Fächern als Tingierung, als seelische Färbung herrschen sollte – auch wenn inhaltlich nicht ein so deutlicher Unterschied vorliegt.

In der Geschichte werden die Kinder von den – nahezu zeitlosen – Welt- und Schöpfungs-Mythen zur immer genauer werdenden Chronologie der Alten Kulturen geführt. Eine erste Krönung stellt dabei das ägyptische Pharaonentum dar, dessen zahlreiche Schriften und Großsteinbauten als grandioses Erbe bis in die Gegenwart hereinragen. Als Apercu sei bemerkt, dass sich dabei auch schon genaue Rechenanweisungen finden, mit denen Brüche zu bearbeiten sind[7].

Die bei Klassenlehrern beliebte Teilung der Geschichtsepoche erlaubt dann, dass der zweite Teil – womöglich passend zum hohen Licht des Frühsommers! – sich mit neuem Griff dem klassischen Griechenland zuwendet. In vielfältiger Weise treten nun bisher unbewusste Rhythmen und Proportionen ins aufgehellte ästhetische Empfinden[8]. Sie werden geleitet und befördert durch Rezitation des Hexameters, durch Betrachten und Zeichnen der Maßverhältnisse einer dorischen Tempelfront, durch angestrebte Harmonie der Leibesbewegung bei der Vorführung des griechischen Fünfkampfes.

Daher lässt sich der Übergang zur fünften Klasse kaum kontrastreicher charakterisieren als mit den Inhalten und Formen, die durch den Lehrplan im Fach Geschichte sichtbar werden. Der Blick gerade auf dieses Fach verdeutlicht den Wandel im Seelischen und die Entwicklungsziele dieses Alters genau in der *Mitte der Kindheit*. Wie sonst in keiner anderen Altersstufe sind auch in der täglichen Rezitation die Themen und Sprachformen von den aus der Geschichte gegebenen Vorbildern dominiert. Augenfällig ist dies schon durch die Gegenüberstellung des Stabreimes im Anfang der vierten Klasse zum Hexameter gegen Ende der fünften Klasse. Für die Mathematik lassen sich durch die Betrachtung dieses scheinbar weit entfernten Metiers wertvolle Anregungen gewinnen. Diese Querverbindung klingt ungewöhnlich, lohnt aber einer eigenen Überprüfung durch den Lehrer, ob und wie er damit für seine Klasse etwas gewinnen kann:

Kann auch die Mathematik-Epoche aus diesem Duktus heraus gestaltet werden?

Können der Erzählteil und die Rezitationen im rhythmischen Teil die Themen aus der Geschichte fortsetzen?

Wie greift der Lehrer verwandte Motive im Rechnen auf?

Wie befruchten sich die Inhalte der verschiedenen Fächer gegenseitig?

Wie lässt sich der Unterricht künstlerisch beleben?

---

[7] Allerdings verblieb in Ägypten die Schreib- und Abstrahierungsfähigkeit innerhalb der Stammbrüche. Für andere Bruchteile stellte dies eine erhebliche Erschwernis dar, weil der Zähler nicht als Anzahl der Bruchteile erkannt wurde (also 2/5 nicht als 2 · 1/5 oder 1/5 + 1/5), sondern als Dividend. Der Quotient von 2 : 5 wurde dann von Stammbrüchen ausgeschöpft mit dem Ergebnis 2 : 5 = 1/3 + 1/15 (=2/5); entsprechend wurden 5/6 als Summe 1/2 + 1/3 beschrieben. Ausführliche Beschreibungen finden sich in:

Ernst Bindel: Die Grundlagen der Mathematik im Lichte der Anthroposophie Stuttgart 1928 / ders.: Das Rechnen, Stgt 1996, S.65 / Helmut Gericke: Mathematik in und Antike und Orient / Herbert MEschkowski: Problemgeschichte der Mathematik, Mannheim 1984 .

[8] Bezeichnender Weise erreichte die griechische Mathematik – ohne auf Stammbrüche zurück zu greifen – den freien Umgang mit Brüchen. Diese wurden sowohl als Größen, wie auch als Ergebnis einer Division (wie in Ägypten) verstanden, aber darüber hinaus gehend erstmals als Proportion gedeutet: Klares Bewusstsein durchdrang nun die Grundlagen der Kunst.

Aus solchen Fragestellungen wird der Klassenlehrer im Mathematik-Unterricht über den Gartenzaun blicken wollen, um das Rechnen in den Gesamtzusammenhang dieser Altersstufe zu stellen. Schauen wir also auf die Geschichte und die aus ihr entnommenen Rezitationsthemen.

Rhythmus und Proportion

Die ersten Eindrücke von vergangenen, aber in der Menschheitserinnerung gegenwärtigen Zeiten erlebten die Kinder in der 3. Klasse mit Erzählungen aus dem Alten Testament und in der 4. Klasse im Bereich der nordischen Mythologien: Die Geschichte entwächst den Geschichten. Die enthaltenen Themen korrespondierten innerhalb des Schuljahres mit den Inhalten der anderen Unterrichte, wobei der Rechenunterricht vermutlich die geringsten Berührungspunkte hatte. Die willenshafte Rezitation des Stabreims fand wenigstens seine Entsprechung in den chorisch geübten Einmaleins-Reihen. Sprachklang und Rhythmus befestigten die Zahlenfolgen, wiederkehrende gemeinsame Teiler und Vielfache wurden als *Zahlenrhythmen* verinnerlicht.

Insgesamt erleben die Kinder dabei ihre eigene Aktivität als Eroberung, Sicherung und Gliederung des Zahlenraumes und seiner Binnenstruktur. Achtet man verstärkt darauf, dass die einzelnen Zahlen innerhalb ihrer Reihe ja Produkte sind, so lenkt man den Blick auf Zahlverwandtschaften im Sinne einer *Einteilung* des Zahlenraumes. So heißt z.B. die 6. Zahl in der 8-er-Reihe 48, sie enthält die Schrittzahl 6 als Multiplikator und die Schrittgröße 8 als Multiplikand; gleichzeitig sind die Zwischenschritte 8 – 16 – 24 – 32 – 40 (– 48) die Sechstel-Bruchteile von 48 (dann findet sich z.B. 40 als fünfter Schritt von sechsen zu 48 und ist daher 5/6 von 48). Diese Sichtweise erhebt sich doch deutlich über den in den ersten drei Klassen stärker gepflegten additiven Aufbau der Zahlen. Der Zahlenraum wird so von vielfältigen Rhythmen durchklungen und verwandtschaftlich geordnet.

Die neue Betrachtungsweise eröffnet damit für die fünfte Klasse ein weites Feld des Bruchrechnens im rein Zahlenmäßigen mit innerlich ergriffenen Bildern von Zahlzusammenhängen, jenseits äußerlicher Anschaubarkeit. Alleine schon die Bemühung des Lehrers um solcherart weiterreichende Gesichtspunkte nimmt dem ständigen Aufsagen von Zahlenreihen die Gefahr des rein mechanischen zu Gunsten eines freudigen Rezitierens, worauf auch Steiner in seinen Einführungen in die anthroposophische Pädagogik hinwies:

> *„Wir können mit dem Kinde die ersten Zahlenverhältnisse ... durchnehmen; wir können es so in die ..... [gegenseitigen] Verhältnisse der Zahlen einführen, dass ihm die Sache durchsichtig ist. ... Wir haben immer noch die Gelegenheit, auch gedächtnismäßig ... das Einmaleins lernen zu lassen. Für die späteren komplizierteren Zahlenzusammenhänge gibt es noch immer die Möglichkeit des Memorierens des Einmaleins, wenn man es nur richtig zu den Zahlenverhältnissen in Beziehung bringt. In dieser Beziehung kann man durch sogenannten Anschauungsunterricht viel sündigen. ...Vieles von dem, was man durch ausgedachte Rechenmaschinen* [gemeint waren: „mechanische Rechenmaschinen"; heute müsste man ergänzen: „sowie Rechen- und Lernprogramme"] *erreichen kann, kann man ebenso gut an den zehn Fingern erreichen oder an der Zahl der Schüler, die in der Klasse sind. ...Es handelt sich darum, dass wir diese Dinge nicht ins Äußerlich-Mechanische überführen, um dem scheinbar innerlich Mechanischen des Memorierens abzukommen.*[9]*"*

> *„Es ist ... so, dass man die mathematischen Dinge ... zunächst auch ganz künstlerisch machen muss, dass man ... das Rechnerische, das Geometrische künstlerisch zunächst an das Kind heranbringt, dass man [dann] zwischen dem neunten und zehnten Lebensjahr zum Beschreiben ... übergeht. Dann ... kann zu dem Gestalten erst das Erklären treten, das*

[9] R. Steiner: Die gesunde Entwickelung des Menschenwesens (GA 303); Dornach [3]1978, S.194/95

Rücksichtnehmen auf Ursache und Wirkung ... Dahinein wächst das Kind erst zwischen dem elften und zwölften Lebensjahr.[10]*"*

Erklären, einen Sachverhalt aufklären heißt ja, die Dinge aufeinander beziehen, sie zueinander ins richtige Verhältnis setzen. Dies ist meist nicht nur mit einfachen logisch-linearen Verknüpfungen von einer alleinigen Ursache zu einer einzigen Wirkung getan. Ein solcherart isoliertes Einzelverstehen stellt nur den reinen Intellekt zufrieden (und auch das nur für kurze Zeit). Verstehen lässt sich nur in der Einbettung in größere und echte Zusammenhänge. Das Gefühl, etwas verstanden zu haben, ist daher auch weniger eine Frage an den *Verstand*, sondern eher an das *Gemüt*[11]: „Fühle ich mich ermutigt, damit selbst umzugehen?"

Worin bestehen nun die Besonderheiten dieses Alters und wie stimmen wir unsere Methode darauf ab? In der fünften Klasse liegt die „*Zeit, in der die letzten Nachklänge eines traumhaften, gleichsam mythologischen Bewusstseins abgestreift sind, aber die Innenerfahrung des eigenen Denkens noch keineswegs erreicht ist*[12]". Erhard Fucke hat die pädagogische Gestaltung dieses Übergangs erarbeitet und dargestellt, wie damit eine gesunde Entwicklung in der Vorpubertät gefördert wird: „*Es gibt für die Mitteljahre des zweiten Jahrsiebts* [also für die 4. und 5.Klasse] ... *die Methode des künstlerisch gestalteten Bildes... [Es] steht zwischen der alten Imagination und dem modernen Selbstbewusstsein*.[13]"

Ein Bild zeichnet sich durch Wahrheit und Sinnhaftigkeit aus, es ist also keine beliebige Illustration und auch kein intellektuell vereinfachtes Modell für den zu erklärenden Zusammenhang. Das Bild muss aus der Sache heraus künstlerisch entwickelt werden und ihre Aspekte in vielfältiger (also nicht notwendig eindeutiger) Weise enthalten bzw. zugänglich machen. Es stützt sich auf sich selbst und braucht dazu eine in ihm selbst enthaltene innere Logik und Glaubhaftigkeit. Nur dann kann es die Phantasie anregen und echtes Interesse wecken, damit sich der eigene Gedankengang des Kindes daran entzünden kann. „*Das Bild wird mit unterschiedlichen und wechselnden Gefühlen und Empfindungen begleitet. Im Sinnen drängt das Gemüt, seine Weltbeziehung zu erhellen. Vor allem aber stellt die Beteiligung des Gemüts das Interesse des Kindes für die Welt her*."[14]

Affinität zur Griechischen Kultur-Epoche

Auf dieser Seelenhaltung erwächst im Laufe der fünften Klasse die innige Affinität der Schüler zu der in der Geschichte darzustellenden griechischen Kultur. Sie ist geradezu das Urbild für dieses Lebensalter. Der Sinnzusammenhang offenbart sich zunächst noch in bildhaften Schilderungen; das Denken bestärkt sich daran und schwingt sich dann daraus empor, in vollem Vertrauen auf die *Sinnhaftigkeit der Welt*, die zu erkennen erstrebenswert ist. Was ist es denn, was die Schüler dieses Alters im Griechischen von sich wieder finden, dass sie oft selbst lauter kleine Griechen werden? Den Weg dazu schilderte ein Klassenlehrer anlässlich einer Bühnendarstellung:

„Warum beginnt die Waldorfschule den eigentlichen Geschichtsunterricht im fünften Schuljahr, dem 11. Lebensjahr des Kindes, mit der Geschichte der ältesten Völker? Die älteste Geschichte bringt uns als ihren wesentlichen Wahrheitsgehalt die Mythen, Sagen und Märchen entgegen. Eine Welt geheimnisvoll gestalteter Bilder, großartig und kindlich

[10] R. Steiner GA 303; a.a.O., S.227

[11] Gemüt = Ort des inneren Mutes (also keine „Gemütlichkeit" im Sinne von angenehm, bequem usw.)

[12] Erhard Fucke: Grundlinien einer Pädagogik des Jugendalters; Stuttgart 1991; S.172/173

[13] E.Fucke; a.a.O., S.173

[14] E.Fucke; a.a.O., S.173

zugleich in vielen ihrer Äußerungen. In der Form dieser Bilder erfassten uralte Völker die Weisheit der Welt in träumendem Bewusstsein.

Solche Formen sind auch der kindlichen Seele noch angemessen. Aber sie ist auf dem Wege zum Erwachen, zum genauen Anschauen der Sinneswelt, zum urteilenden Denken, zum Erfassen des Gewordenen.

Durch die sagenhafte Welt der ältesten Völker leiten wir im 5.Schuljahr das Kind herunter bis zur sinnesfrohen, schönheitsliebenden Welt der Griechen. Wir führen die Kinder bis zu Alexander dem Großen, dessen Persönlichkeit und dessen Taten schon im vollen Lichte historischer Forschung stehen.[15]*"*

Es gibt kein Lebensalter, in dem der Mensch sich so freudig in seinem eigenen Leib erlebt, in dem er seine Kräfte und Fähigkeiten so in Harmonie mit der Umwelt erleben kann, wie hier in der Mitte der Kindheit. Der Leib ist bereits deutlich gestreckt und doch gekräftigt, aber noch nicht erdenschwer. Die Leibesgeschicklichkeit steigert sich ohne äußeres Training wie von selbst zu erstaunlichen Fähigkeiten bis hin zu den Wettkampfspielen der 5.-Klass-Olympiaden im klassischen griechischen Fünfkampf oder den ebenso beliebten Zirkusübungen.

Dieses glückvolle *griechische Lebensgefühl* bezieht die Empfindungen mit ein. Mit gefühlsmäßiger Sicherheit wird die Schönheit von Bildwerken erlebt. Zusammengehörigkeit und Verhältnismäßigkeit der Teile untereinander wie auch zum Bildganzen werden mit einem natürlichen Sinn für Proportion ästhetisch wahrgenommen, ohne es als Urteil zu begründen. Die Plastiken und Tempel der Griechen müssen mit den Kindern also nicht begrifflich erklärt, sondern möglichst bildhaft beschreibend besprochen werden. Dies erreicht der Lehrer kaum ohne eigene Begeisterung[16], die er wenigstens teilweise auch auf sachkundige Grundlagen stellen sollte.

Die *Ausgewogenheit* des klassischen Tempels erreichten die Griechen – nach langem Suchen und in vielfältigen Lösungsansätzen – mit Hilfe der Proportionierung (= *Analogia*). Durch sie klingen alle einzelnen Bauglieder des Tempels zu einem geordneten Ganzen zusammen, *in* bestimmten *Verhältnissen* abgeleitet aus einem *Grundmaß*. Umgekehrt spiegelt sich in allen Teilen das Ganze. Die zusammenstimmenden Verhältnisse formen den Wohlklang (= *Harmonia*) aus verbindenden Grundmaß (= *Symmetrie*) und gemessener Bewegung (= *Rhythmus*) zur Anmut, die aus innerer Ruhe bewegte Schönheit (= *Eurhytmia*)[17].

---

[15] Christian Maurer: Sprechen in der Schule, Bd.2 (Kl.4/5), S. 109; Berlin 2007

[16] Wie sie z.B. bei Gottfried Richter (Ideen zur Kunstgeschichte; Stuttgart ^{5}1967, S.75/76) durchklingt: „*Da ist zunächst die wunderbare klare Gliederung, die in beseligender Harmonie die architektonischen Elemente sondert, indem sie diese verbindet. Da ist schließlich das Maß, die unendlich reinen Verhältnisse, in denen die Glieder des Baues zu einander stehen, der Wohlklang, mit dem sie einander begegnen, sich ineinander fügen.*" Auch in der schöngeistigen Literatur lassen sich Schilderungen finden, in denen eine intuitive Erkenntnis des griechischen Kunstschaffens aufleuchten, so z.B. die Ausführungen Adalbert Stifters (Nachsommer; 2.Band II) über ein antikes Mädchenbildnis: „*Das ist eben das Wesen der alten Kunst, dass man von keinem einzelnen Teile sagen kann, das oder dies ist das Schönste, sondern das Ganze ist schön. Wenn wir von der* [äußeren] *Bewegung auf die* [innere] *Bewegbarkeit übergehen, ...* [sehen wir an den] *Gewändern ... nicht nur, was ist, sondern auch was zunächst war und auch was sein wird. Und wie es mit dem Gewande ist, ist es auch mit dem Leib, der ja das Gewand der Seele ist, ... welche der Künstler durch das Bild und Gleichnis des Leibes darstellt, ... und die Empfindung der Beweglichkeit, ... dass* [die Figuren] *leben.* [Dazu kommt] *... diese Ruhe der allseitigen Übereinstimmung aller Teile zu einem Ganzen. ... Bewegung regt an, Ruhe erfüllt; und so entsteht jener Abschluss in der Seele, den wir Schönheit nennen*."

[17] Eine ausführliche Darstellung dieser Zusammenhänge findet sich in: Frank Teichmann (Der Mensch und sein Tempel – Griechenland; Stuttgart 1980)

Für die Jugenderziehung empfahl Plato wärmstens die Musik, weil durch sie „*der Rhythmus und die Harmonie am meisten in die Seele dringen und sie am stärksten erfassen*“.[18] Im Bereich des Sprachlichen findet sich die Entsprechung dieser bildnerischen Ästhetik in der Vielfalt der griechischen Versmaße. Die unterschiedlichen Rhythmen darin vermitteln seelische Grundstimmungen bereits bevor der Bedeutungsinhalt der Worte vom Bewusstsein erfasst ist. Alle Rhythmen erreichen dennoch verlässliches Gleichmaß, sie bilden je Zeile ein Ganzes, das sie nach innen gliedern – wie in der Architektur – zur gemessenen Bewegung aus innerer Ruhe. Diese Beziehung der Teile zum Ganzen als *Proportionierung* wird am vollkommensten erlebt beim Hexameter, auf dessen Wellen die großen Epen (mit über 100.000 mündlich weitergegebenen Zeilen!) getragen wurden.

> *„In der griechischen Sprachkultur war das Versmaß vorrangig. Inhalt und Aussage ordneten sich unter. ...Mit der geschmeidigen, vokalreichen Sprache ... ist der Fluss der Hexameter-Bewegung ... im Einklang zu erleben. Die Hexameter-Zeile fängt einen Weltzusammenhang, eine sinnliche Beobachtung der Außenwelt, in ein Sprachbild ein. Die erste Halbzeile mit drei ... Bewegungsimpulsen umfasst den Inhalt mehr als Ganzheit, ... in der zweiten Halbzeile differenziert sich die Bewegung ... in Beschreibung [und] ... Einzelheiten.[19]“*

Da der Mathematik-Unterricht in den Händen desselben Lehrers liegt, der auch die Kinder in der Geschichte und Kunst dieser Kultur beheimatet, mit ihnen rezitiert und ihnen die griechischen Sagen erzählt, liegen doch optimale Bedingungen vor, um die Welt der Zahlen mit demselben griechischen Morgenlicht zu beleuchten und mit derselben Seelenwärme zu befeuern!

> *„Nun ist es bei diesem Unterrichte so, dass der langweilige Lehrer ungeheuer wenig oder gar nichts erreicht, dass derjenige Lehrer aber die Mathematik ... reizvoll ... macht, der mit seinem ganzen Wesen bei dieser Mathematik... für die harmonische Raumesidealität der ganzen Welt ... begeistert sein kann, ... wenn er schwärmen kann für innere Harmonien. ... Dann wird er etwas gerade in diesen Unterricht hineinbringen, was für das Kind ungeheuer wichtig ist ... Dann wird er durch dieses Element dem Verwirrenden entgegenwirken, was das Leben ja immer hat.[20]“*

Verwandte Motive in der Mathematik

Die aus der Menschenkunde dieses Alters abgeleiteten Unterrichts-Ansätze und –Themen lassen sich in der Mathematik aufgreifen; mit ihnen kann der Unterricht altersgemäß belebt werden – zur Freude der Kinder! *Im echten Bruchrechnen* treten vielfältige Motive auf, in denen sich die Kinder *mit griechischem Empfinden und Denken* wieder finden können. Dass diese Anregungen im Mathematik-Unterricht fruchtbar umzusetzen sind, soll wenigstens mit einigen Beispielen illustriert werden.

Rhythmen

Die Zahlenreihen des Einmaleins können nun als Proportioner aufgefasst werden. Mit ihnen ist ein neuer Einstieg in die Bruchrechnung möglich mit dem Material der ganzen Zahlen. Dazu wird die Beziehung *Teil von* benutzt, mit der Brüche stärker in ihrer Funktion als *Portionierer, „Bearbeiter“ (= Operatoren)* oder Multiplikatoren betrachtet werden. So entstehen Aufgaben der Art:

Das sind die Achtel von 56: $^1/_8$ von 56 ist 7 ; $^2/_8$ von 56 sind 14 ; usw.

---

[18] Zitiert nach B. Burghardt in: Erziehungskunst 07/08, Stuttgart 2015

[19] Maurer a.a.O., S.126

[20] R. Steiner GA 303; a.a.O., S.220

Statt der Einmaleinsreihen von ganzen Zahlen sind nun auch Multiplikationsreihen von (genügend einfachen) Bruchteilen möglich. Beachtet man dabei die Kürzungsmöglichkeiten, so ergeben sich abwechslungsreiche Reihen mit dennoch verlässlich wiederkehrenden Rhythmen; so wird z.B. aus den Vielfachen eines Viertels:

$^1/_4$ – $^2/_4$ – $^3/_4$ – $^4/_4$ – $^5/_4$ – $^6/_4$ – $^7/_4$ usw.

nach entsprechendem Vereinfachen die Reihe:

$^1/_4$ – $^1/_2$ – $^3/_4$ – 1 – $1^1/_4$ – $1^1/_2$ – $1^3/_4$ usw.

Ebenso gehören in den Bereich der Zahlenrhythmen alle Arten von Kettenrechnungen (hier z.B. die mehrfache Anwendung von Brüchen als Zahlen-Bearbeiter) oder (einfach gehaltene) rekursive Rechenwege, selbst dann noch, wenn diese in formale Rechenschemata gerinnen.

Auch das gegenseitige Messen und Vergleichen von Brüchen setzt rhythmisches Empfinden voraus. Schon zu Beginn wird das Enthaltensein als Messvorgang mittels wiederholender Tätigkeit (Messen mit Schöpfmaßen oder Knotenschnüren) beschrieben.

Bildhaftigkeit

Wir wollen in der Mathematik Denkprozesse anschaulich schildern und entwickeln dazu bildhafte Elemente, die auch unabhängig von äußerlichen Anlässen sein können. Darauf wird im Rechenunterricht an der Waldorfschule von Beginn an geachtet. Damit werden unterschiedliche Zugänge und Verständnisebenen emöglicht. Die Empfindung, etwas verstehen zu können, stärkt darüber hinaus die Grundlagen für Verantwortungsgefühl:

> *„Indem man ... anschaulich bildhaft erzieht, nimmt sich nämlich jedes Kind so viel aus dem Unterricht, als es vertragen kann. Es entsteht ein Verhältnis wie zwischen dem Essen und dem Sattsein. ... Man rückt gewöhnlich gar nicht den Rechenunterricht an die moralischen Prinzipien heran... Aber für den, der ... lebensvoll betrachtet, für den stellt sich die Sache so, dass das Kind, das in der richtigen Weise an das Rechnen herangebracht worden ist, ein ganz anderes moralisches Verantwortungsgefühl im späteren Alter hat“*[21].

Viele Rechenvorgänge lassen sich aus ihren eigenen Gesichtspunkten ästhetisch formalisieren und in einer ihnen angemessenen Bildform anschaubar machen. Das kann z.B. die fortschreitende Zerlegung einer Zahl in ihre Primfaktoren entlang einer grafischen Verzweigung (siehe dort) sein oder die Auflistung aller Teiler einer Zahl in geeigneter Form (z.B. als Produkte in einer symmetrischen Doppelspalte). Auch das danach entwickelte Verfahren zur Hauptnennersuche wird durch ein Schema in einen sinnvollen Bildbezug gebracht. Bildhafte Schemata und Beschreibungen erklären Sachverhalte oft viel umfassender als in Worte gefasste logische Begründungen. Sofern die (Sprach-)Bilder aus der Sache selbst heraus entwickelt sind, besteht auch kaum die Gefahr, in plump vereinfachende Modelle abzugleiten oder sich in ideologische Höhen zu versteigen.

Zudem gibt es im Mathematik-Unterricht einen genügenden Fundus von Sachaufgaben, mit denen die bildhafte Beschreibung eines Zusammenhanges auch die Rechnungsart helfend beleuchten kann. Jeder Lehrer wird dazu selbst Aufgaben fertigen oder geeignete auswählen können. Beim reinen Rechnen mit Zahlen verblasst diese Fülle und oft behilft man sich mit mühsam zusammen getragenen Umkleidungen; doch ob dadurch auch *echte Bilder* entstehen, die vielschichtig sind und deren Wahrheitsgehalt einer Überprüfung standhalten? Wenn kein sachgemäßes Bild zu finden ist, sollte man auch entschieden darauf verzichten, anstatt ein Zerrbild zu bemühen. Es gehört nicht zum Wesen der Mathematik, dass sie sich in der äußeren

[21] GA 305, S.109

Sinnlichkeit spiegelt oder gar von ihr ableiten lässt. Wird jedoch ein *sinnlichkeitsfreies Denken* geübt, so kann dieses sehr wohl *freie innere Anschauungen* erreichen.

> *„Es gibt ... Gebiete des Lebens, die unanschaulich sind ... ; und wenn man sie anschaulich macht, so täuscht man. Es ist falsch, ... etwas, was nicht auf Anschaulichkeit gestellt ist, ... in die Anschaulichkeit zu bringen"*[22].

Damit waren vor allem die einfachen Rechenhilfen gemeint, bei denen durch verschiebbare Kugeln die innere Rechentätigkeit nach außen in einen sinnlichen Mechanismus verlagert oder gar durch ihn ersetzt wurde. Diese Hilfsmittel wurden inzwischen durch Computer-Animationen und perfekte Nachhilfe-Programme abgelöst, was noch fragwürdiger ist: Die dabei eingesetzte Illustrationsflut aus meist sehr äußerlichen und oft plumpen Fehlbildern erstickt das Entwickeln von eigenen inneren Bildern, bringt aber dennoch mechanische Rechenfähigkeit und Regelkenntnis als Scheinerfolg hervor.

Empfindung

In bildhafte Schilderungen eines Sachverhaltes können sich Kinder *mit Gemütskräften* einleben und sich innerlich damit verbinden – sie sind ganz *bei der Sache*. Für Schüler, die nicht alles schnell intellektuell erfassen und strukturieren können, ist dies oft der einzige Zugang; bei den intellektuell begabten Schüler gewinnt das Denken die Wärme der Empathie dazu.

> *„Die anderen Seelenkräfte [sind] zum Erfassen der Dinge mindestens ebenso wichtig wie der Verstand; ... man kann ebenso mit dem Gefühl, mit der Empfindung, mit dem Gemüte verstehen, wie mit dem Verstand. Begriffe sind nur eines der Mittel, um die Dinge der Welt zu verstehen.*[23] *"*

So ist das Messen mit Schöpfmaßen zwar noch eine äußere Aktivität. Doch richtet sich die Aufmerksamkeit verstärkt auf die Eigentätigkeit: „Wie oft tut man es?" So soll die innere Empfindung dafür geweckt werden, dass ein kleineres Maß (kleinerer Bruch) öfter enthalten ist als ein größeres. Dann muss dies auch nicht mehr mittels eines realen Versuchs bewiesen werden. Die innere Anschauung wird dann auch ohne äußeren Sinnenschein abwägen können. Die ursprünglich äußere Tätigkeit wird nun innerlich nachgebildet und wandelt sich dadurch zum Bild des mathematischen Vorgangs. Dieses ebnet den Weg zu *multiplikativen Vergleichen*, mit denen Zahlen und Größen empfindungsmäßig zu einander in Beziehung gebracht werden: Die *Proportion* ist ein seelisch tingierter Vergleich und lebt im Ästhetischen, also in einer höheren Ebene; wogegen der normale *additive Vergleich* als *Differenz* in anfassbaren Größen erscheint und daher im Wortsinne *be-dingt* bleibt.

Über die oben ausgeführte Bildhaftigkeit hinaus lässt sich die Empfindung auch unmittelbar ansprechen, wenn man die Klarheit und Schönheit von Zahlen, Strukturen und Rechengesetzen so schildert, dass sie lebendig vor das Kind hintreten. Bei der Suche nach den Teilern einer Zahl entdeckt man Symmetrien im Inneren der Zahl. Die Begriffe „Teiler-Reichtum und –Armut" sowie „Inhalt einer Zahl" lassen schon in der Wortbildung Empfindungen mitschwingen und diese steigern bis zur „Vollkommenheit" und „Selbständigkeit" von Zahlen. Gerade im 5. Schuljahr haben die Kinder das Gespür, solche Beziehungen zu entdecken, deren Besonderheit zu würdigen und auch ihre Ästhetik innerlich nach zu empfinden.

Erwachender Intellekt

Die Charakterisierung des 5.Schuljahres als griechische Klasse würde ein wesentliches Signum auslassen, wenn nicht auch die Fähigkeiten des listenreichen Odysseus einbezogen würden. Die

[22] GA 310, S.82

[23] ?Steiner in „Gesunde Entw" GA303? S.195-228? / Fucke?

ungetrübte Freude des erwachenden Verstandes an der *List* findet gerade im Bruchrechnen der 5.Klasse ihre berechtigte Verwendung.

Die Verfahren zum Auffinden von gemeinsamen Teilern und Vielfachen, die Suche von Hauptnenner und Erweiterungszahlen, die Vereinfachung des Teilens mittels Kehrwert, die geschickte Vorbereitung und Ausnutzung des Kürzens sowie die Teilbarkeitsregeln erleben die Kinder oft als geniale *Tricks,* mit denen die Welt der Zahlen erobert und mit dem Verstand listig beherrscht werden kann.

Im Erfassen der Proportionalität verbindet sich der Verstand mit einem empfindenden Abwägen: „Passt etwas zum anderen?“ – „Stimmen die Verhältnisse zusammen?“ Dies ist deutlich mehr als nur ein intellektueller Zugriff auf die Welt. Der Zwei- und Dreisatz (als Schlussrechnen) in Kl. 5-7 beruht darauf; der erste Schritt zur logischen Kopplung von Ursache und Wirkung wird begleitet von der Empfindung echter Zusammenhänge statt nur einseitiger Folgerungen. Dies schafft die Formen, in denen Lebenssicherheit wurzelt: „*Der Mensch würde ... in ein gewisses Chaos des Lebens hineingeworfen, wenn er nicht jene Festigkeit bekäme, die man gerade durch die Mathematik bekommt.*[24]“

Die Weiterführung der Dezimalzahlen und ihre Bearbeitung durch die Grundrechenarten sollen schließlich den freien Umgang mit ihnen ermöglichen. Mit der Anwendung der Dezimalzahlen auf (fast) alle Lebensgebiete lässt sich die Welt erobern und mit dem Verstand analysieren (= aufteilen) und beherrschen! Daher sollten durch lebensreale Sachaufgaben immer wieder genügend viele Lebensbezüge zu praktischen Anwendungen gefunden werden.

Nach wie vor „*frägt das Kind empfindungsgemäß, ob sich der Lehrer geschickt verhält im Leben, ob der Lehrer vor allen Dingen sicher im Leben drinnensteht*[25].“ Sie wollen spüren, dass ihr Lehrer in der Welt zu Hause ist: *Im Leben mit etwas rechnen können*[26], das wollen sie an ihrem Lehrer erleben. In der Mathematik erwarten sie, dass die Rechenarten und ihre logischen Zusammenhänge die Welt strukturieren und sie damit die von Menschen geschaffene Umwelt und Wirtschaftsweise, vor allem Handwerk und Handel verstehen können. Dazu gehört auch die Verwendung der Maße unter möglichst konkreten Situationen.

Dies alles ist natürlich nur durch ausdauernde Übung zu erreichen, bei der erklärende Begründung und beleuchtender Zusammenhang oft zurück bleiben zu Gunsten der zu erlangenden technischen Fertigkeit.

Zum Stoffplan der 5. Klasse

Wiederholung und Ausweitung

Da es sich in der 5. Klasse weniger um die Einführung eines prinzipiell neuen Stoffes handelt – wie bei der Bruchrechnung im 4. Schuljahr – wird immer wieder eine Erinnerung an die bereits geübten Rechenverfahren im Bereich der Brüche und Dezimalbrüche notwendig sein. Die Frage von Wiederholungen ist eine pädagogisch und didaktisch nicht ganz einfache. Dasselbe noch einmal zu lernen weckt wenig Begeisterung und motiviert nicht. Man kann und muss natürlich an das schon Behandelte anknüpfen aber zugleich erleben lassen, dass die Schüler sich nun auf einer höheren Stufe befinden. Ein Bild dafür ist die *Curriculumspirale*, auf der man zum gleichen Inhalt auf höherer Stufe kommt.

---

[24] R. Steiner, GA 303, S.228m

[25] R. Steiner, GA 303, S.179

[26] A. Fischer in: Erziehungskunst 2+4, Stuttgart 2002

Häufig kann man als Lehrer beobachten, dass die Keime, die man in einem Schuljahr gelegt hat, ein Jahr später aufgegangen sind und sich verwurzelt haben. Die Schüler haben ein viel selbständigeres Verhältnis zu den Inhalten als ein Jahr zuvor. Das macht möglich, die schon behandelten Themen zu vertiefen und auszuweiten und Fehlendes zu ergänzen.

Ähnliches wird mancher schon beim Übergang von der 1. zur 2. Klasse beobachtet haben, und er wird es wieder beim Übergang von der 6. zur 7. Klasse beobachten können. Die 1., 4. und 6. Klasse sind im Waldorflehrplan Klassen, in denen viel Neues veranlagt wird, das dann im Folgejahr im Verständnis und Können sich befestigt. Deshalb sollte auch in diesen Klassen das Neue noch nicht als sicher erworbenes Können betrachtet werden. In Bezug auf die Mathematik sind es in der 1. Klasse die Zahlen und elementaren Operationen, in der 4. Klasse die Brüche und in der 6. Klasse die Vorbereitung der algebraischen Methoden. Die Anlässe dazu sind die jeweiligen Entwicklungsstufen der Kinder, die Unterrichtsinhalte sollen diese Schritte unterstützen.

Überblick

Ähnlich wie in der 4. Klasse verlangen die beiden Hauptblöcke Dezimalbrüche und gewöhnliche Brüche den größten Teil der Arbeits- und Übungszeit im Rechenunterricht. Manches, was von dem für die 4. Klasse Angegebenen noch nicht behandelt werden konnte, findet nun seinen Platz im 5. Schuljahr.

Von den Grundrechenarten sind und bleiben die *Addition und Subtraktion im Bruchrechnen* die Hauptschwierigkeit, während die Multiplikation und Division für gewöhnliche Brüche nach den schon behandelten Regeln ohne Schwierigkeiten weiter geführt werden können.

Für die *Multiplikation und Division von Dezimalbrüchen* ist ausreichend Zeit aufzuwenden, damit diese Rechnungsart als sicheres Werkzeug eingeübt werden kann. Neu ist dabei die Ausweitung der *Division durch Bruchteile* (gewöhnliche wie dezimale); sie baut auf die wachsende Befähigung der Schüler, sich in Verhältnisse und Proportionen einzuleben.

Textaufgaben zum Schlussrechnen (Zweisatz und Dreisatz) beziehen sich durch die dabei benutzten Maße auf reale Sachverhalte. Mathematisch gesehen öffnen sie sich zur Verhältnisrechnung und bereiten die Prozentrechnungsformeln des 6. Schuljahrs vor. Aus den Dezimalbrüchen können bereits einfache Prozentrechnungen abgeleitet werden.

Weil also nicht wesentlich neue Inhalte besprochen werden, ist es wichtiger, neue Aspekte des Bekannten zu behandeln. So wird das im 4. Schuljahr an den Brüchen und Dezimalbrüchen Gelernte zwar wieder aufgegriffen, aber mit neuen Verfahren bereichert. Diese erleichtern und sichern zum einen den Rechenvorgang, beleuchten zum anderen aber auch die Zusammenhänge. Vor allem die Addition und Subtraktion von Brüchen mit größeren Nennern gewinnt dabei Übersichtlichkeit. Auch schwierigere Umwandlungen von Brüchen in Dezimalbrüche und umgekehrt werden möglich. Im Übrigen werden wir alle *Regeln zur Bruchrechnung* jetzt systematisch besprechen, aufschreiben und anwenden.

In welcher Reihenfolge die beiden Hauptthemen im Unterricht angeordnet werden, liegt in der Entscheidung des Lehrers. Es sprechen beide Male gute Gründe für eine Bevorzugung: Einerseits schließt sich das Bruchrechnen nahtlos an das Eingangskapitel Zahlenverwandtschaften an, andererseits ertüchtigen die Dezimalbrüche die Schüler zum lebensgemäßen Gebrauch des Rechnens im Alltag. Das Ziel ist, alle vier Grundrechenarten auf die (positiven) rationalen Zahlen[27] anwenden zu können. Das schriftliche Dividieren wird schließlich der Prüfstein dafür

[27] Alle Zahlen, die sich als Bruch zweier ganzer Zahlen darstellen lassen, bilden den Zahlenbereich der rationalen Zahlen. Die ganzen Zahlen können mit dem Nenner 1 als Bruch umgeschrieben werden, die Dezimalzahlen mit

sein, ob sich die Rechenfertigkeiten ausreichend verselbständigt haben und damit frei benutzbar wurden!

Das schließt ein Eintauchen in die *Poesie der Mathematik*, wie sie in den elementaren zahlentheoretischen Betrachtungen durch das *rhythmologische Rechnen* aufleuchtete, nicht aus. Die einleitend als griechisch beschriebene Seelenstimmung der 5. Klasse soll ja durch passende Motive in der Mathematik unterstützt und ihre Möglichkeiten genutzt werden. Die neue Fähigkeit, Dinge aufeinander zu beziehen, heißt dann für die Mathematik: Dinge (Größen und Formen) zueinander ins Verhältnis setzen, Zusammenhänge erspüren und aufsuchen, erste Einsicht in allgemeine Regeln gewinnen als Vorstufe für echte Beweise. Die seelische und leibliche Bewegungsfähigkeit des 5.-Klässlers soll sich auch in einer mathematischen Beweglichkeit geistig ausleben dürfen.

Möglichkeiten dazu werden gleich im ersten Abschnitt angeboten mit den *Zahlenverwandtschaften* als neuem Zugang zur Struktur des Zahlenraumes. Gemeinsame Teiler und Vielfache, Regeln zur Teilbarkeit und Besonderheiten der Primzahlen bieten dazu ein reiches Betätigungsfeld. Viele der darin aufgeführten Themen sind weitgehend unabhängig vom Hauptstoff der danach behandelten Rechenverfahren und können daher als besondere Glanzpunkte eingesetzt werden. Außerdem eignen sie sich sehr gut für den freieren mündlichen Unterricht und das Kopfrechnen. Häufig ist dasselbe Thema auf unterschiedlichen Wegen dargestellt, sie stehen zur freien Wahl. Das Bruchrechnen wird gelegentlich auf einzelne Abschnitte daraus zurückgreifen; bei Bedarf wird darauf verwiesen, damit das Nötige vorbereitet werden kann.

Xxx Steinerzitat „freies Rechnen“ o.ä.(siehe Einleitung S Kl.4?) / Fehlt noch: „Für die Gedächtnisschulung werden sehr gerne geschickte Rechenverfahren geübt. S.a. Zitat am Kapitelende

Noch einfügen: Vorschläge zur Stoffverteilung, Mindestprogramm, Verschiebbares usw.

Zahlenverwandtschaften

Rhythmus und Gliederung

Die Kraft der Rhythmen bestärkte die Kinder auf ihrem Weg zur 5. Klasse in fast allen Fächern und erleichterte ihnen das Lernen. Rhythmische Ansätze halfen vielfach auch beim Rechnen, sei es bei rekursiven Rechenregeln oder den Zahlenreihen des Einmaleins. Im Beginn des Bruchrechnens zeigte der Zusammenklang zweier Zahlenrhythmen den Hauptnenner auf. Die „springenden Pferde“ in Klasse 3 erweckten einen ersten Eindruck von Teilerreichtum und –armut. In beiden Beispielen prägten Rhythmen dem Zahlenraum eine innere Gliederung auf. Dies kann in der 5. Klasse wieder aufgegriffen werden, gefühlsgesättigt von den Vorerfahrungen, aber nun stärker auf die Zahlen selbst bezogen.

Zahlenstrahl mit 1x1-Reihen

Eine Möglichkeit dazu stellt der Zahlenstrahl dar, den wir in voller Länge an die Klassenwand hängen. Geeignet sind dazu Papierstreifen nebeneinander, mit senkrechten Trennlinien in Quadrate abgeteilt. Einzelne Kindergruppen beschriften diese Streifen von 1 bis 60 oder noch besser bis 100, dazu auf einzelnen Papierquadraten in einer jeweils gesonderten Farbe mit großen Ziffern die Zahlenreihen der 2er-, 3er-, 4er-, 5er- und 6er-Reihe. Etliche Ziffern kommen nun gehäuft vor und sind nur durch die Farbe unterscheidbar, daher kann es nutzen, wenn jeweils das

Nennern der Zehnerpotenzen (10; 100; ...). Lediglich auf die negativen Zahlen wird verzichtet; deren Einführung erfolgt am besten über Begriffe der Buchführung in oder nach Klasse 6.

entsprechende Produkt klein dazu geschrieben wird; die 12 der 2er-Reihe hätte dann 6·2, auf dem 3er-Kärtchen steht 4·3, auf dem 4er 3·4 und auf dem 6er das Produkt 2·6. Alle Kärtchen werden in separaten Zeilen unter den langen Zahlenstrahl am passenden Ort angeheftet. Auf diese Weise entstehen an etlichen Stellen gut gefüllte Spalten, an anderen bleiben Lücken oder gar völlige Leere.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
	2er		4		6		8		10		12		14		16		18		20		22		24
		3er			6			9			12			15			18			21			24
			4er				8				12				16				20				24
				5er					10					15					20				
					6er						12						18						24

Mit mehr Zeit und Platz an der Wand können noch weitere Reihen dazu kommen, am besten mit 9; 10 und 12; danach lohnt eventuell noch die 15. Doch merkwürdigerweise füllen alle diese Reihen keine Lücken auf, sondern bereichern nur bereits besetzte Spalten. Einzig die 7er-Reihe kann (bis 120) weitere vier der leeren Spalten besetzen[28].

Viele Fragestellungen und interessante Beobachtungen können im wiederholenden Anschauen während der Epoche auftauchen. Wären zum Beispiel auch die 12er- und 15er-Reihe als Zeile angebracht, ließe sich als erste Zahl des Zusammenklangs im übergeordneten Großrhythmus der 60er ausmachen und dazu der untergeordnete Verbindungsrhythmus als 3er-Reihe (weil sie sowohl die Spalte 12 wie 15 bedient). Im mündlichen Unterricht lassen wir weitere solcher Paarungen suchen.

Bild der Zahlenverwandtschaften

In jeder Zeile finden sich nebeneinander die Vielfachen der Anfangszahl. Alle in einer Spalte vorkommenden Zahlen verweisen mit ihrer Zeilenfarbe und -höhe (und dem darauf notierten Produkt) darauf, dass die zugehörige Anfangszahl ein Teiler der Spaltenzahl ist. Die in der 6. Zeile sichtbare 12 weist also die 6 als einen ihrer Teiler aus.

Die tabellenartige Anordnung lässt nun alle Zahlenrhythmen und –Verwandtschaften in einem geometrischen Gesamtbild erscheinen. Auffällig sind die starken Häufungen von Teilern im 12er-Rhythmus, unter denen die Marken 48 – 60 – 72 – 96 als überreich noch alle anderen überragen. Im Sprachbild der Unterstufe haben diese Zahlen sehr viel Besucher oder gar Freunde.

Dann gibt es Zahlen mit nur wenigen Gästen, also wenig Verwandtschaftsbeziehungen anderen Zahlen, sie sind teilerarm; so schaut bei der 51 nur die 3 vorbei, bei 38 nur die 2. Auch mit dieser Fragestellung können die Kinder täglich neue Entdeckungen machen.

Aber was ist mit den ganz einsamen Zahlen los, die von gar keiner Reihe besucht werden? Je nachdem, wie viele Zeilen angeordnet wurden, bleiben sie ganz leer, oder haben nur ihre eigene Startzahl. Genaugenommen gehören sogar 2 – 3 – 5 dazu, weil auch in ihrer Spalte nur die Startzahl steht. Sie scheinen völlig isoliert und einsam zu sein, sie haben keine Teiler. Ihre Einzigkeit begründete die Namensgebung: *Primzahl*. Dabei steht der Wortteil „prim“ für den Primus, den Ersten, in der Schülersprache auch der Beste. Damit die jeweilige Primzahlspalte einen Eintrag erhalten kann, muss sie auch tatsächlich als Erste dort auftreten. Wir werden sie

[28] Dies sind neben 7 noch die Vielfachen mit sich selbst und den höheren Primzahlen (11, 13, ...). Letztere tragen erst nach 121 = 11·11 mit Kombinationen unter sich weitere Lückenfüller bei.

später als wahre Könige der Zahlen schätzen lernen, und Könige sind nun mal einsame Persönlichkeiten.

Ihr Auftreten innerhalb des Zahlenstrahls scheint etwas unregelmäßig verteilt zu sein mit kaum vorhersagbaren Abständen. Diese unklare Merkwürdigkeit darf in der Klasse gerne einige Tage rumoren. Man darf erwarten, dass aus der Schülerschaft erste Vermutungen kommen, oder notfalls mit zarten Tipps nachhelfen. Auch für den Lehrer soll hier Gelegenheit sein, ohne Hilfsmittel selber zu suchen. Die Lösung dafür, welche Orte für Primzahlen erlaubt sind, ist am Ende der Suche dann erstaunlich einfach – wie bei jedem Rätsel nach der Auflösung.

Die Suche nach den ersten Primzahlen bis 100 ist dazu eine lohnende Aufgabe. Sie kann an Schülergruppen vergeben werden, die einzelne Teile des Zahlenstrahls überprüfen und dann die gefundenen Primzahlen zur Auflistung an der Tafel melden. Vorsicht ist geboten, wenn die 7er-Reihe nicht vermerkt ist, dann sind drei Zahlen schlecht zu enttarnen: $49 = 7 \cdot 7$; $77 = 7 \cdot 11$; $91 = 7 \cdot 13$. Alle übrigen Vielfachen von höheren Primzahlen (also 11, 13, 17, 19 ...) sind bis 120 bereits durch andere Teiler ausgeschieden.

Das Aufdecken von Primzahlteilern erfolgt im Kapitel „Primzahlzerlegung“. Für die systematische Primzahl-Suche eignet sich der oben benutzte Zahlenstrahl schon recht gut; er lässt sich mit einer einfachen Idee zum *Sieb des Eratosthenes*[29] umbauen, welches durch seine geschickte Anordnung alle teilbaren Zahlen aussiebt und die Primzahlen übrig lässt. Dieses Sonderthema lässt sich jederzeit ab Klasse 5 aufwärts im Rahmen einer Extrastunde einfügen.

Die Teiler einer Zahl

Die Division wird bei vielen Schülern noch länger eine ungeliebte Rechenart bleiben oder mindestens als anspruchsvolle Rechnung gelten. Mit einem neuen Ansatz kann dennoch manch überraschender Zusammenhang aufzeigt werden, mit dem sich die Entdeckerfreude frisch erwecken lässt. Schon alleine die Ankündigung, dass wir uns nun „schöne Geteiltaufgaben“ ohne Komma oder Rest vornehmen und es dennoch keine langweilige Wiederholung etwa des 3.- oder 4.-Klass-Stoffes werden soll, sondern eine „Schatzsuche“ unter bekanntem Terrain: Was ist in einer Zahl alles verborgen? Kann man schon vor der Rechnung voraussagen, ob eine Division aufgeht oder nicht? Es darf also die reine Neugier überwiegen, ohne dass sofort auf den praktischen Nutzen geschielt werden muss! Der wird sich dann von alleine einstellen. Dies ist spätestens beim Bearbeiten von Brüchen der Fall, weil die Kenntnis von gemeinsamen Teilern in Zähler und Nenner das Kürzen ermöglicht.

Teilbarkeit

Im Zusammenhang mit dem Zahlenstrahl und den 1×1-Reihen darunter kann das Folgekapitel gut vorbereitet werden, einige der Teilerregeln können bereits im Voraus von den Schülern vermutet, mündlich umschrieben oder gar korrekt formuliert werden. Mögliche Fragestellungen finden sich in diesen

Aufgaben

1) Wie unterscheiden wir gerade Zahlen von ungeraden?

2) Welche Zahlen kann man ohne Rest durch 2 teilen?

3) Haben die geraden Zahlen oder die ungeraden mehr Teiler unter sich?

4) Welche Zahlen kann man sicher nicht durch 4 teilen?

5) Welche der 1×1-Reihen fällt dadurch auf, dass sie immer auf Spalten trifft, in denen besonders viele Zahlen zu Besuch sind?

[29] Siehe Abschnitt „Ergänzendes“

6) An welchen Stellen des Zahlenstrahls hast du die besten Chancen, auf eine Lücke zu treffen und damit eine Primzahl zu entdecken?

7) Welche Zahlen haben in ihrer Spalte nur genau eine Zahl unter sich?

8) In welchem Rhythmus klingen folgende Paare zusammen?

a) 4 und 6 b) 6 und 8 c) 6 und 9 d) 8 und 12 e) 12 und 18

9) Welche 1×1-Reihen schaffen es bei den Paaren a-e) jeweils beide Partner zu treffen?

10) Woran erkennst du sofort, ob sich eine Zahl durch 5 dividieren lässt (ohne Rest)?

Gerade und ungerade Zahlen

Schon lange vertraut ist den Schülern die Unterscheidung von geraden und ungeraden Zahlen, wobei erstere eindeutig beliebter sind. Den ungeraden Zahlen haftet immer der Geruch des Abnormen, Unaufgeräumten an. Auch sieht man ihnen nie an, ob oder durch wen sie sich teilen lassen, wenn man sie nicht bereits gut kennt. So lässt sich z.B. „243“ durch 3, 9, 27 und 81 teilen, auch die „245“ hat mit 5, 7, 35 und 49 ebenso viele Teiler, während in der Nachbarschaft die „247“ nur die kaum zu entdeckenden Teiler 13 und 19 hat, die „241“ sich beim Teilen sogar völlig verweigert (Primzahl).

Beim Malnehmen ergibt sich rasch (mit „u“ für „ungerade“ und „g“ für „gerade“) die Regel: g·g = g; g·u = g; u·g = g; u·u = u; es scheint so zu sein, als ob die geraden Zahlen bevorzugt wären oder gar die ungeraden beherrschen wollten: In drei von vier Fällen ist das Ergebnis gerade! Wieso gibt es eigentlich dann nicht mehr gerade Zahlen als ungerade? Da ja jede gerade Zahl einen ungeraden Nachfolger (erreichbar mit „plus 1“) als Partner hat, muss es auch gleich viele ungerade Zahlen geben. Daher gibt es noch viele weitere ungerade Zahlen, die nicht durch Malnehmen entstanden sind, also auch keine Teiler haben[30].

Will man wissen, ob eine ungerade Zahl durch irgendeine Zahl teilbar ist, kann ein solcher Teiler nur ungerade sein (wegen u·u = u). Man dividiert und wartet ab, ob ein Rest übrig bleibt. Am leichtesten geht es mit den kleinen Teilern wie 3 und 5; die Division durch diese ist harmlos, aber noch einfacher sind die nachfolgenden Regeln, mit der man rasch die Teilbarkeit überprüfen kann. Die mathematischen Begründungen für die nun geschilderten Teilerregeln finden sich im Anhang. Doch zuerst nutzen wir noch Fähigkeiten der 2 im Umgang mit geraden Zahlen.

Zweier als Verdoppler und Halbierer

Bei einer neuerlichen Charakterisierung der geraden Zahlen werden die Schüler die Endziffer als Kennzeichen dafür benennen: Beträgt die letzte Ziffer 0; 2; 4; 6 oder 8, so heißt die Zahl gerade, andernfalls ungerade. Die geraden Zahlen kann man immer halbieren, also ohne Rest durch 2 teilen.

Die bereits in früheren Klassen als Rechenkette angewandten Verdoppelungen und Halbierungen können sich hier nochmals anschließen. Als Darstellungsform bietet sich an:

$7 \xrightarrow{*2} 14 \xrightarrow{*2} 28 \xrightarrow{*2} 56$ usw.

oder:

$3072 \xrightarrow{:2} 1536 \xrightarrow{:2} 768 \xrightarrow{:2} 384$ usw.

Beim Verdoppeln ist die Anfangszahl ohne Einfluss auf die Länge der Rechenkette, beim Halbieren kann die Kette rasch eine ungerade Zahl erreichen und abbrechen. Lange Ketten bereitet der Lehrer dadurch vor, indem er das gewünschte Schlussglied der Kette mit einer hohen

[30] Diese vermeintliche Lücke wird durch die Fülle der Primzahlen behoben (siehe voriger Abschnitt).

Zweierpotenz (also einer Zahl aus der Reihe: 2 - 4 - 8 - 16 .... 1024 - 2048 - 4096 usw.) multipliziert und sie dann an den Anfang der Halbierungskette setzt.

Aufgaben

1) Verdopple nacheinander bis du 1000 überschritten hast:

a) 5 b) 25 c) 3 d) 7 e) 9 f) 31 g) 121

2) Halbiere nacheinander bis du eine ungerade Zahl erreicht hast:

a) 4096 b) 3840 c) 10000 d) 11264 e) 33024

Teilbarkeit durch Vier und Acht

Da die vollen Hunderter jeweils durch 4 teilbar sind, genügt die Betrachtung der beiden letzten Stellen. Wenn der Hunderterrest, also die letzte Doppelstelle (Zehner und Einer), eine Viererzahl ist, so trifft dies auch auf die Gesamtzahl zu. Weil man die 20-er-Schritte innerhalb des Hunderterrestes gut kennt, reicht auch die Frage: Ist der Zwanzigerrest eine Viererzahl? Die Bequemlichkeit lässt sich noch etwas steigern: Ist der Abstand zum benachbarten Zwanziger eine Viererzahl?

Ist 1968 durch 4 teilbar? Ja: Der Abstand zum nächsten Zwanziger (hier die 60) beträgt 8.

Ist 376 durch 4 teilbar? Ja, denn der Abstand zum nächsten Zwanziger (von 76 auf 80) beträgt 4. Ebenso gut geht natürlich die Prüfung mit dem unteren Zwanziger-Nachbarn (60): Hier beträgt der Abstand 16 (76-60), der als 4er-Zahl die Teilbarkeit bestätigt.

Die Teilbarkeit durch 8 ist zwar kaum eine lohnenswerte Überprüfung wert, sei aber vollständigkeitshalber angefügt. Entscheidend sind nun schon die letzten 3 Stellen. Man schaut auf den nächsten Zweihunderter oder einem zu diesem benachbarten Vierziger. Ist der Abstand dazu eine Achterzahl? - wenn ja, so war auch die Ausgangszahl durch 8 teilbar.

Ist 95752 durch 8 teilbar? Ja, denn der nächste Zweihunderter (95)800 hat Vierzig darunter den Nachbarn (95)760 mit dem verbleibenden Abstand 8. Stattdessen kann auch der darunter liegende Zweihunderter gewählt werden: (95)600 erreicht nach 3 Vierzigern darüber (95)720 und lässt 32 als verbleibenden Abstand.

Muss man aber tatsächlich durch 4 oder 8 dividieren, so kann es außerordentlich praktisch sein, entsprechend mehrfach zu halbieren:

Aus 1968 : 4 wird also 1968 $\xrightarrow{:2}$ 984 $\xrightarrow{:2}$ 492 und

aus 95752 : 8 wird entsprechend 95752 $\xrightarrow{:2}$ 47876 $\xrightarrow{:2}$ 23938 $\xrightarrow{:2}$ 11969

Teilbarkeit durch Fünf

Die Zahlen mit der Endung 5 werden als bequeme Mitte zwischen den vollen Zehnern erlebt und daher als runde Zahl den übrigen Endziffern 1 bis 9 vorgezogen. Der Grund dafür liegt natürlich in unserer Stellenschreibweise auf der Basis 10 (10 = 2·5) als reine Konvention. Aufgrund der vertrauten Fünferreihe werden die Schüler selbständig formulieren können:

Jede Zahl mit Endziffer 0 oder 5 ist durch 5 teilbar ohne Rest.

Die Teilbarkeit durch 10 lohnt wohl nicht zum Aufschreiben, wird dennoch mündlich im Vorbeigehen gemacht: Die zu teilende Zahl braucht mindestens eine Endnull.

Quersumme und Teilbarkeit: 3 – 6 – 9

Hat man nun jahrelang bei der Stellenschreibweise die einzelnen Ziffern als Verwalter ihres Zahlenfaches (Einer, Zehner, Hunderter, usw,) geschildert und ihnen den Kontakt zu den Nachbarn - außer beim Übertrag - untersagt, so dürfen sie hier ausnahmsweise ohne Rücksicht auf ihre höhere oder niedrigere Stelle sich gegenseitig beraten, ob sie die Teilbarkeit durch 3 erlauben. Alle Ziffern einer Zahl werden nämlich querbeet zusammengezählt.

Die Größe der damit gebildeten *Quersumme* hat mit der ursprünglichen Zahl recht wenig zu tun, trotz gleicher Quersumme kann nicht auf eine irgendeine Beziehung zwischen den Zahlen geschlossen werden, so haben beispielsweise 102030201, 4212 und 27 trotz übereinstimmender Quersumme 9 miteinander nichts zu tun. Dennoch kann die Quersumme Überraschendes leisten: Sie sagt uns, ob die so untersuchte Zahl teilbar ist durch 3 oder gar durch 9.

Die Ursache für diese doch etwas überraschende Möglichkeit kann mit den Schülern gemeinsam gesucht und auch gefunden werden. Die 9-er-Reihe liefert sie für die zweistelligen Zahlen selber, weil mit jedem Schritt die Einer um 1 abnehmen, die Zehner dafür um 1 größer werden (von 9 über 18, 27 bis nach 90), so dass sich beide Ziffern (aus dem Einerfach und dem Zehnerfach) gleichbleibend auf 9 als Quersumme ergänzen. Nach $11 \cdot 9 = 99$ (mit der Quersumme 18) wird der Hunderter überschritten auf $12 \cdot 9 = 108$; die in den letzten beiden Ziffern erneut beginnende 9er-Reihe startet mit 8 in den Einern um 1 zu klein. Diesen fehlenden Abmangel kann aber der neu dazugekommene Hunderter mit seiner 1 ausgleichen: Die Quersumme $1+0+8 = 9$ ist als 9er-Zahl gerettet. Bei Nachfrage nach dem 1000er-Übergang führt die gleiche Begründung weiter[31].

Ähnlich argumentiert man beim 3er: Die 3er-Reihe hat ab 10 nacheinander als Einer nur die Ziffern 2; 5; 8. Gemeinsam mit der Ziffer 1 vom Zehner bleibt aber die Quersumme als 3er-Zahl erhalten: 12 liefert $1 + 2 = 3$ und 15 erreicht $1 + 5 = 6$ und so weiter über die Zwanziger bis mit den Dreißigern ein neuer Zyklus beginnt.

> Ist 513 eine Dreierzahl? Die Quersumme beträgt $5 + 1 + 3 = 18$.
>
> Damit ist die Zahl durch 3 teilbar, ja sogar durch 9.

Bei großen Zahlen darf die Quersumme auch mehrfach angewandt werden:

> 878967 hat die Quersumme 45, die nochmalige Quersumme liefert 9.
>
> Also war die Zahl eine 9er-Zahl (und natürlich auch eine 3er-Zahl).

Bei der Überprüfung auf 3er-Zahl dürfen die Ziffern 3, 6 und 9 sogar übersehen werden:

> Für 878967 genügt damit die Quersumme $8+7+8+7 = 30$.

Selbst wenn das Ergebnis der Untersuchung „ungünstig“ ausfällt, liefert sie dennoch wertvolle Hinweise. Wird nämlich von der Quersumme die Teilbarkeit verneint, so sagt sie sogar den beim Teilen verbleibenden Rest voraus!

> 59 hat die Quersumme 14, zur eben überschrittenen 3-er-Zahl (12) kam der Überrest 2; zur vorausgehenden 9-Zahl (hier: 9 selbst) lässt die Quersumme den Rest 5. Beim Teilen bestätigt sich beide Male die Voraussage[32]:
>
> $59 : 3 = 19\ R_3 2$ und $59 : 9 = 6\ R_9 5$.

Vorteilhaft zu benutzen ist die Kombination mit der Teilbarkeit durch 2. Ist nämlich eine gerade Zahl gleichzeitig auch Dreierzahl, so ist sie auch durch 6 teilbar, weil diese ja aus den beiden Faktoren 2 und 3 aufgebaut ist. Eine klärende Begründung dieses Zusammenhangs ergibt sich im Folgekapitel zur Primzahlzerlegung.

Eine Besonderheit: Teiler 11

[31] Korrekte Beweise zur Teilbarkeitsprüfung mittels Quersumme finden sich im Anhang.

[32] Auf dieser Eigenschaft beruhte die „Neuner-Probe“ bei handschriftlichen Rechnungen, die vor der Einführung der elektronischen Hilfsmittel geläufig war, heute aber nur noch gelegentlich als Zugabe in der Oberstufenalgebra thematisiert wird; näheres dazu im Anhang. Die früher übliche Schreibweise 59 : 3 = 19 R2 wird hier nur zur Beschreibung der Teilbarkeit benutzt. Durch den dazu notierten Index kann der Rest auf den verursachenden Teiler verweisen. Nach Einführung des Buchrechnens benutzten wir korrekterweise $59 : 3 = 19\,{}^2/_3$

Je nach Begabung und Interessenlage der Klasse kann eine Teilerregel für den Elfer angeboten werden. Zunächst stellt man fest, dass die 11er-Reihe gleiche Ziffern bei Einern und Zehnern zeigt, jedenfalls bis 99. An dieser Zifferngleichheit ist die Teilbarkeit durch 11 immer zu erkennen. Mit etwas Geschick lässt sich diese Regel auf große Zahlen ausdehnen.
Die zu prüfende Zahl wird von rechts in Doppelstellen abgeteilt; aus diesen zweistelligen Anteilen bildet man querbeet die Summe. Dies darf auch wiederholt werden, bis Zweistelligkeit erreicht wird. Ergibt sich dabei eine 11-er-Zahl, so ist auch die ursprüngliche Zahl durch 11 teilbar.

Ist 56749 eine 11er-Zahl? Wir bilden die Paar-Quersumme aus Doppelstellen:

$56749 \longrightarrow 5|67|49 \longrightarrow 5 + 67 + 49 = 121 \longrightarrow 1|21 \longrightarrow 1 + 21 = 22$

Die Paar-Quersumme 22 ist eine 11er-Zahl, also auch 56749!

Wie bei der Quersummenprüfung für 3 und 9 liefert die Probe beim 11er ebenfalls den richtigen Rest bei nicht aufgehenden Divisionen!

In der Mathematik-Literatur wird für die 11er-Probe meist die *Wechselsumme* [33]benutzt. Sie beruht auf demselben Prinzip, braucht aber keine extra Einteilung in Ziffernpaare. Weil dabei auch negative Zahlen auftreten können, ist in Klasse 5 davon abzuraten.

Teilbarkeitsregeln

In der 5. Klasse kann – ähnlich dem Vokabelheft in den Fremdsprachen – ein kleines Heft (oder ein eingelegtes farbiges Extrablatt) zur Notierung von Rechenregeln geführt werden, das später zu einer ersten Formelsammlung anwachsen kann. Mit den Teilbarkeitsregeln können wir beginnen:

Eine Zahl ist ohne Rest teilbar

durch	*wenn*
2	*sie gerade ist (also eine Endziffer der Form 0, 2, 4, 6, 8 hat)*
3	*ihre Quersumme eine 3er-Zahl ist*
4	*sie gerade ist und der Abstand zum nächsten Zwanziger eine 4er-Zahl ist*
5	*sie Endziffer 0 oder 5 hat*
6	*sie eine 3er-Zahl und gleichzeitig gerade ist*
8	*der Abstand zum nächsten Zweihunderter eine Achterzahl ist*
9	*ihre Quersumme eine 9er-Zahl ist*
10	*sie Endziffer 0 hat*
11	*ihre Paar-Quersumme eine 11er-Zahl ist*

Ist die Überprüfung nicht erfolgreich, so bleibt ein Rest. Dieser wird dann auch übrig bleiben, wenn man wirklich dividiert.

Anwendungen

Wir haben nun für alle häufig nachzufragenden Teiler praktische Prüfverfahren zur Hand, mit denen sich alle Zahlen leicht entschlüsseln lassen. Bei nicht aufgehenden Divisionen lassen sich sogar die Reste vorhersagen. Die Beziehung zwischen einer Zahl und ihren Teilern wird später noch einmal mit der Primzahlzerlegung verdeutlicht.

Im mündlichen Unterricht lassen sich diese Regeln gut benutzen. Eine Prüfergruppe aus der Klasse darf die Teilbarkeit von gegebenen Zahlen voraussagen, eine Teilergruppe führt die

[33] Alternierende Quersumme (s. Anhang)

Division durch und verifiziert die Vorhersage. Oder jemand darf eine große Zahl mittels der Regel so präparieren, dass sie teilbar wird und gibt sie zum Teilen frei.

Zunächst erscheint die Teilbarkeit mangels Verwendungszwecke wenig lohnenswert. Ob ihre Besprechung gelingt, liegt weitgehend daran, ob im gemeinsamen Tun der Klasse die Freude am reinen Rechnen geweckt werden kann. Die Früchte für den Unterricht sind jedenfalls reichhaltiger, als man vermutet: Stärkung der Gedächtniskräfte, Sicherheit im Umgang mit den Grundrechenarten, die Einmaleins-Reihen sind wieder präsent, die Zahlen bekommen Innenleben und Eigencharakter, der Zahlenraum wird durch Verwandtschaften strukturiert! Aber unschlagbar nützlich sind die entwickelten Regeln bei der Frage, durch welche Zahl ein Bruch gekürzt werden kann.

Aufgaben

1. Zeige, dass alle Zahlen durch 4 teilbar sind, aber einige auch sogar durch 8:

a) 92 b) 232 c) 796 d) 1208 e) 3592 f) 482624

2. Welche der Zahlen sind durch 3, welche sogar durch 9 teilbar?

a) 78 b) 148 c) 242424 d) 314253 e) 282828

3. Einige dieser Zahlen sind nicht durch 9 teilbar: a) 108 b) 1524 c) 3060 d) 3090

Suche sie heraus und sage den Rest voraus, der beim Teilen bleiben wird. Dividiere danach die Zahl durch 9 und zeige, dass deine Voraussage richtig war.

4. Welche Zahlen sind 11er-Zahlen?

a) 121 b) 5060 c) 2435 d) 2818 e) 345631

Der „Inhalt“ einer Zahl

Wenn wir nun die Teiler einer Zahl aufsuchen wollen, stellen die Teilbarkeitsregeln eine große Hilfe dar, besonders bei großen oder unübersichtlichen Zahlen. Wir werden Zahlen sehen, die sehr viele Teiler in sich vereinen, diese sind also reichhaltig gefüllt; andere haben nur eine spärliche Verwandtschaft, die sich ihnen als Teiler zugesellen. Beides sehen wir täglich an der Klassenzimmerwand in Form des Zahlenstrahles mit seinen verschieden gut gefüllten Spalten

Natürlich haben große Zahlen auch bessere Chancen, in den unter ihnen liegenden Zahlen auch geeignete Zahlen zu finden, die sich ihnen als Teiler zugesellen. Oft sehen wir diese an unserem Zahlenstrahl gar nicht mehr. So kann die 20 als Teiler die Reihe (1), 2, 4, 5, 10 (und sich selbst) aufweisen, während die 40 schon die Teiler (1), 2, 4, 8, 10, 20 (und sich selbst) besitzt. Gerechtigkeitshalber darf man für den Teilerreichtum also nicht nur die Anzahl der Teiler alleine vergleichen. Dass jede Zahl sich selbst und die 1 als Teiler besitzt, ist selbstverständlich und muss nicht bei jeder Zahl erneut als Lob ausgesprochen werden.

Zerlegung einer Zahl in Produkte

Damit wir keinen Teiler übersehen, gehen wir systematisch vor. Mittels der Teilbarkeitsregeln prüfen wir (abgesehen von der 1) nacheinander die 2; 3; 4; usw. Die größeren, uns nicht so geläufigen Teiler finden wir meist unter den Vielfachen der bereits entdeckten kleinen Teiler. Die Teiler notieren wir mit ihrem jeweiligen Partner als Produkt, so dass stets die ganze Zahl präsent bleibt. Die Symmetrie der entstehenden Zahlenreihe betonen wir durch geeignete Darstellung:

Teiler von 20:			Teiler von 36:		
$1\cdot 20$	$\downarrow$ $\uparrow$	$20\cdot 1$	$1\cdot 36$	$\downarrow$ $\uparrow$	$36\cdot 1$
$2\cdot 10$		$10\cdot 2$	$2\cdot 18$		$18\cdot 2$
$4\cdot 5$		$5\cdot 4$	$3\cdot 12$		$12\cdot 3$

4·9 9·4
6·6

Die Ästhetik dieser Symmetrie begründet sich dabei rein sachlich aus dem „Innenleben“ der jeweiligen Zahl und ist nicht äußerlich aufgesetzt, ja sie ist sogar hilfreich beim Verständnis der jeweiligen Abfolge der Teiler. Gleichzeitig zeigt sich die – mehr oder weniger reichhaltige – rhythmische Binnendifferenzierung. Dass die Zahl selber in sich enthalten ist, muss dabei nicht zwingend mitgeschrieben werden; die Tabelle kann dann um eine Zeile entlastet werden. Eine weitere schöne Darstellungsweise ist das

Teilerhaus:

2	0
1 · 20	20 · 1
2 · 10	10 · 2
4 · 5	5 · 4

3	6
1 · 36	36 · 1
2 · 18	18 · 2
3 · 12	12 · 3
4 · 9	9 · 4
6 · 6	

4	8
1 · 48	48 · 1
2 · 24	24 · 2
3 · 16	16 · 3
4 · 12	12 · 4
6 · 8	8 · 6

Mit der 36 ist auch ein Beispiel dabei, welches unten im Umkehrpunkt ein *Zahlenpaar auf halbem Wege als Mitte*[34] enthält. Dies setzt eine *Quadratzahl* voraus, die als Produkt zweier gleicher Zahlen entstanden ist. Weitere schöne und reiche Zahlen zur Untersuchung bieten nachfolgende

Aufgaben

1) Bestimme alle Teiler der Zahlen a) 16 b) 24 c) 28 d= 30
2) Wie heißen die Teiler von a) 48 b) 60 c) 64 d) 72
3) Wie ändert sich die Teilerfülle bei Verdoppelung der Zahlen auf
a) 96 b) 120 c) 128 d) 144
4) Die Zahlen a) 25 b) 51 c) 76 haben wenige Teiler; bestimme sie!
5) In diesen Zahlen sind Teiler aus höheren Primzahlen versteckt:
a) 143 b) 319 c) 119 d) 1001 Findest du sie? Tipp: Versuche mit 11 und 7.

Aufgaben dieser Art, auch mit viel einfacheren Beispielen, eignen sich gut zur Verwendung im täglichen Kopfrechnen.

Der Inhalt

Wenn wir zwei Zahlen vergleichen wollen, welche der beiden sich vielfältiger teilen lässt, müssen wir auch deren Größe beachten, um gegenüber kleineren Zahlen fair zu bleiben. Dies ist ein Motiv, das in der 5.Klasse durchaus ernst genommen wird. Vielleicht kommen die Kinder selbst auf die einfachste und dennoch gerechte Möglichkeit: Man stellt alle Teiler der Zahl fest, addiert diese auf und vergleicht die entstandene Summe mit der Zahl selbst. Bei der Anerkennung als *echte Teiler* lassen wir auch die 1 zu, aus Gerechtigkeitsgründen aber nicht die Ausgangszahl selbst (sonst wären ja die großen Zahlen wieder zu sehr im Vorteil).

---

[34] Es ist der „geometrische“ (multiplikative) Mittelwert im Gegensatz zum normalen „arithmetischen“ (additiven) Mittelwert

Die Zahl 10 *enthält* die Teiler: 1, 2, 5 und damit die *Teilersumme* 8. Wir sprechen also der 10 den *Inhalt* 8 zu.

Deutlich mehr Teiler hat dagegen die 12 mit der Reihe: 1, 2, 3, 4, 6; der Inhalt ergibt sich aus: 1+2+3+4+6 = 16. Sie ist die kleinste Zahl, die von ihrem eigenen Inhalt übertroffen wird.

Noch fülliger erscheint uns die 36 mit 1+2+3+4+6+9+12+18 = 55 als Inhalt.

Unser Schema können wir auch so vereinfachen, dass nur noch die einander entsprechenden Teiler sich alleine gegenüber stehen:

1	(10)	1	(12)	1	(36)
2	5	2	6	2	18
		3	4	3	12
				4	9
				6	

Arme und reiche Zahlen

Mit dem Begriff des „Inhalt“ erhalten wir eine völlig neue Sichtweise auf die Zahlen. Wir stellen alle Teiler aus dem Inneren der Zahl zusammen und vergleichen die entstehende Summe mit der Zahl selbst. Bei etlichen Zahlen ist der Inhalt so mager, dass er nicht einmal die Ausgangszahl selbst erreicht; bei anderen wird die Zahl von ihrem Inhalt bei weitem übertroffen. Das wird z.B. von 36 (s.o) spielend geschafft, ebenso von 60:

1	(60)	Die Teiler-Summe:
2	30	1+2+3+4+5+6+10+12+15+20+30 = 98
3	20	übertrifft die Ausgangszahl 60 erheblich.
4	15	
5	12	
6	10	

Wir haben also *arme* und *reiche* Zahlen gefunden. In den beiden obigen Beispielen würden wir also die „10“ (mit der Teilersumme 1+2+5 = 8) eine arme Zahl, die „12“ (mit der Teilersumme 1+2+3+4+6 = 16) eine reiche Zahl nennen.

Zwar nicht üblich, aber für den vorübergehenden Gebrauch in der Klasse könnten wir auch das Prädikat *überreiche Zahl* vergeben, wenn ihr Inhalt (die Summe ihrer Teiler) das Doppelte ihrer eigenen Größe erreicht oder gar übertrifft. Das wird zum ersten Mal bei 120 erreicht:

1	(120)	Aus der Summe:
2	60	1+2+3+4+5+6+8+10+12+15+20
3	40	+24+30+40+60 = 240
4	30	ergibt sich genau das Doppelte
5	24	der untersuchten Zahl 120.
6	20	
8	15	
10	12	

Vollkommene Zahlen

Sehr selten tritt der Fall ein, dass die Summe der Teiler genau gleich groß wie die eigentliche Zahl ausfällt. Einer solchen Zahl sprechen wir einen herausragenden Charakter zu: Wir nennen sie *vollkommen*, weil sie im Äußeren wie im Inneren ganz mit sich übereinstimmt – eine im seelisch-geistigen Sinne ganz besondere Harmonie.

Nach dem bisher Geübten könnten die Kinder selbst auf die Suche gehen, vielleicht mit dem Tipp: Über 30 lohnt sich die Suche nicht mehr, weil diese Eigenschaft so selten auftritt und der Weg zur nächsten Zahl erst kurz vor 500 einen Erfolg zeigt![35] In der Tat sind es im vertrauten Zahlenbereich lediglich die Zahlen 6 (Teilersumme 1+2+3 = 6) und 28 (Teilersumme 1+2+4+7+14 = 28), welchen dies möglich ist.

Mit den vollkommenen Zahlen lassen sich besonders schön aufgehende Additionen von Brüchen zusammenstellen! Zunächst bilden wir die Kehrwerte der Teiler, also Stammbrüche, in denen die bisherigen Teiler als Nenner auftreten. Den Teiler 1 lassen wir aus, weil mit ihm als Stammbruch 1/1 nichts neues entsteht; dafür lassen wir jetzt die ganze Zahl zu, denn sie stellt als Stammbruch der innersten Kern dar, der in allen anderen Brüchen enthalten ist. Bei 6 benutzen wir also die Teiler 2, 3 und die 6 selbst mit den zugehörigen Stammbrüchen ½; 1/3; 1/6. Deren Summe (½ + 1/3 + 1/6 = 1) ver-*eint* sich zum vollkommenen Ganzen, also zur 1. Gemäß der eben getroffenen Teiler-Auswahl bestätigt sich dies auch bei 28; die zugehörigen Stammbrüche ergeben als Summe ebenfalls genau 1 (= ½ + ¼ + 1/7+ 1/14 + 1/28)[36].

Für Bruchrechenaufgaben lassen sich noch etliche andere Kombinationen zur Ganzzahligkeit erproben. Einige Möglichkeiten finden sich im Abschnitt zur Addition von Brüchen.

Befreundete Zahlen

Noch seltener sind Zahlenpaare, die sich wechselseitig in ihren Inhalten spiegeln. Die Frage, was das Wesen der Freundschaft ausmache, sei von Pythagoras mit einem Zahlenrätsel beantwortet worden: Auch wenn zwei Freunde sich nicht gleichen, so sei doch der Eine des Anderen Inneres wie bei 220 und 284. Das Rätsel löst sich, wenn der multiplikative Inhalt der beiden Zahlen gebildet wird. Bei 220 sind dies die Teiler 1; 2; 4; 5; 10; 11; 20; 22; 44; 55; 110 mit der Summe 284, umgekehrt hat die Zahl 284 die Teiler 1; 2; 4; 71; 142 mit der Summe 220![37]

Primzahlen

Ganz arm scheinen einige Zahlen zu sein, weil sie außer der 1 (und sich selber, was aber hier nicht zählt) gar niemand haben, der ihr einsames Schicksal mit sich teilen will. Sie sind allein, doch haben sie sich so daran gewöhnt, dass selbständig stehen gelernt haben und auch auf niemanden angewiesen sind. Mit ihrer Standfestigkeit sind sie sogar die verlässlichen Bausteine aller übrigen Zahlen. Wir nannten sie bereits echte Könige, wenn auch ohne eigenes Reich. Jede von ihnen ist ein Erster unter Gleichen: *Primus inter pares*! Sie spielen in der Mathematik und Zahlentheorie eine große Rolle. Wir werden bei der Primzahlzerlegung auf sie zurückkommen und uns beim Bruchrechnen von ihnen helfen lassen.

[35] Die nächste Zahl wird erst mit 496 erreicht, deren Nachfolger heißt schon 8128

[36] Zum Addieren wird die Ausgangszahl als Hauptnenner benutzt, beim Erweitern treten alle bisherigen Teiler (also einschließlich 1, aber ohne die Zahl selbst) als Zähler auf: ½ + 1/3 + 1/6 = 3/6 + 2/6 + 1/6 = 6/6; der Leser möge es für 28 selbst nachprüfen.

[37] Das nächste „Freundespaar“ findet sich erst bei 10.744 und 10.856; die sehr aufwändige Teilersuche wird wesentlich erleichtert mit der Zerlegung in Primfaktoren, die später noch entwickelt wird.

Verbindungen zwischen Zahlenrhythmen

Vorbereitungen

Wir erinnern daran, dass wir in der Geschichte von den atmenden Tieren schon in der 3. und dann wieder in der 4. Klasse die *Zusammenklangszahl* von Rhythmen kennengelernt haben.[38] Dies wollen wir nun vertiefen und auf dem neuen Niveau der 5. Klasse in mathematische Formen bringen. Wir entdecken dabei interessante Zahlengesetzmäßigkeiten und sogar überraschend wertvolle Hilfen für unsere Rechnungen mit den Brüchen.

Jede Einmaleins-Reihe prägt unseren Zahlen ihren Rhythmus auf, so etwa die 4er-Reihe mit 4 – 8 – 12 usw.; wir nehmen einen zweiten Rhythmus dazu und hören darauf, bei welchen Zahlen die beiden zusammen klingen. Ist dies beispielsweise die 6er-Reihe mit 6 – 12 – 18 – 24, so entdecken wir den Zusammenklangrhythmus der beiden Ausgangsrhythmen. Beim 4er- und der 6er-Rhythmus ist dies dann der 12-er-Rhythmus.

Gemeinsame Teiler und Vielfache

Auf jeden Fall ist das *Produkt* der beiden Ausgangszahlen immer eine Zahl, in der die entsprechenden Rhythmen zusammenkommen. Das wäre hier bei $4 \cdot 6 = 24$ der Fall. Ob sie schon vorher zusammenklingen, hängt davon ab, ob sie gemeinsame *Teiler* haben. Dies trifft auf 4 und 6 zu, weil sie beide den Teiler 2 enthalten. Entnehmen[39] wir diesen Teiler dem Produkt 24, indem wir es durch 2 dividieren, so erreichen wir wieder die ursprünglich gefundene Zusammenklangzahl 12.

Kleinstes gemeinsames Vielfaches

Wenn wir ein größeres Zahlenpaar betrachten, wird das Vorgehen noch deutlicher: Bei 8 und 12 beträgt das Produkt $8 \cdot 12 = 96$. Bei dieser schon recht großen Zahl erklingen die 8er- und 12er-Reihe ganz sicher gemeinsam. Das ist aber nicht das erste Mal, denn sie stimmen auch in 48, ja sogar schon in 24 zusammen, jedoch nicht früher. Also ist 24 ist die kleinste Zahl, in der sowohl 8 als auch 12 enthalten sind. Dieses kleinstmögliche gemeinsame Vielfache von 12 und 8 nennt uns daher den 24er-Rhythmus als ihren Zusammenklangrhythmus, und deshalb treffen sie nach 24 auch in allen Vielfachen von 24 zusammen.

Dass 24 das *kleinste gemeinsame Vielfache* von 12 und 8 ist, kürzt man mit der Schreibweise *24 = kgV (12 ; 8)* ab. Für uns wird es beim Bruchrechnen wichtig werden. Bei zwei Brüchen mit verschiedenen Nennern führt es uns zum kleinsten gemeinsamen Nenner und liefert damit den bestmöglichen Hauptnenner, zu dem wir dann durch Erweitern gelangen können.

Größter gemeinsamer Teiler

Gleichzeitig können wir bei 12 und 8 auch gemeinsame Teiler entdecken. Der Teiler 2 ist in beiden Zahlen enthalten, aber auch 4 passt noch in beide hinein, doch einen größeren gleichzeitigen Teiler für beide Zahlen gibt es nicht mehr. 4 ist also der größtmögliche gemeinsame Teiler von 12 und 8. Dieser wird uns später beim Kürzen von Brüchen helfen. Dass 4 der *größte gemeinsame Teiler* von 12 und 8 ist, kennzeichnen wir mit *4 = ggT (12 ; 8)*.

Überbrückender und verbindender Rhythmus

[38] Sollte dies nicht geschehen sein, kann man sie rasch kurz behandeln.

[39] Im Moment betrachten wir alle Zahlenbeziehungen multiplikativ, wir benutzen also nur die Punktrechnungen Multiplizieren und Dividieren. Einen Teiler (oder Faktor) entnehmen heißt hier also, ihn herausdividieren oder abspalten; einen Faktor hinzufügen heißt dann, mit ihm multiplizieren.

In der Geschichte von den atmenden Tieren haben wir gesehen, wie zu zwei Zahlen-Rhythmen (im damaligen Beispiel wurden sie gebildet von der Vaterzahl 6 und der Mutterzahl 4) es zwei weitere, damit verwandte Rhythmen gibt.

Es ist zum einen der vermittelnde Kleinrhythmus gebildet aus der 2, der damaligen Kindszahl, den wir als *harmonisierenden Rhythmus* bezeichneten; das ist der Rhythmus, welcher beide Grundrhythmen mitzählt. Zum anderen gibt es den überbrückenden Großrhythmus, der vom *Zusammenklang* beider Grundrhythmen gebildet wird; damals war es die Familienzahl 12. Diese vier rhythmisch aneinander gekoppelten Zahlen hatten wir bereits damals übers Kreuz angeordnet:

	Familienzahl 12			überbrückender Großrhythmus Zusammenklang	
Mutterzahl 4		6 Vaterzahl	Grundrhythmus a		Grundrhythmus b
	2 Kindzahl			Harmonisierung vermittelnder Kleinrhythmus	

Das zweite oben angeführte Beispiel ging von den beiden Zahlen[40] a = 12 und b = 8 aus. Der überbrückende Großrhythmus wurde vom *Zusammenklang* 24 gebildet, dem *kleinsten gemeinsamen Vielfachen* von 12 und 8. Den verbindenden Kleinrhythmus erreichten wir als *Harmonisierung* in 4, dem *größten gemeinsamen Teiler* von 12 und 8.

	kgV(12;8) = 24			kgV(a;b) Zusammenklang	
12		8	Grundrhythmus a		Grundrhythmus b
	4 = ggT(12;8)			Harmonisierung ggT(a;b)	

Bei der Einführung in Klasse 4 haben wir die betreffenden Zahlenreihen einander direkt gegenübergestellt; der zeitlich verlaufende Rhythmus wird dadurch in ein räumliches Bild von (Zahlen-)Abständen übertragen. Bei den Grundzahlen 12 und 8 ergibt sich damit das Bild:

24 ***48*** ***72*** ·· überbrückender Großrhythmus

12 – ***24*** – 36 – ***48*** – 60 – ***72*** ···· Grundrhythmus a

8 - 16 - ***24*** - 32 - 40 - ***48*** - 56 - 64 - ***72*** ··· Grundrhythmus b

4-8-12-16-20-***24***-28-32-36-40-44-***48***-52-56-60-64-68-***72*** ··· verbindender Kleinrhythmus

Größter gemeinsamer Teiler und kleinstes gemeinsames Vielfaches

Offenkundig sind der ggT, das kgV und die beiden Ausgangszahlen a und b miteinander verbunden, aber wie? Bei Bedarf kann ein weiteres Zahlenpaar betrachtet werden, um die

[40] Weil wir erst in der 6. Klasse mit der systematischen Verwendung von Buchstaben zur Kennzeichnung einer beliebigen Zahl beginnen, wäre für einen Tafelanschrieb hier als Schülerversion die Bezeichnung Zahl1 und Zahl2 möglich.

Gesetzmäßigkeit klarer zu machen. Wir wählen zwei weniger eng verwandte Zahlen aus, nämlich a = 12 und b = 20 mit den Reihen:

a) 12 – 24 – 36 – 48 – ***60*** – 72 – 84 – 96 – 108 – ***120*** – ⋯

4-8-12-16-20-24-28-32-36-40-44-48-52-56-***60***-64-68-72 ····· vermittelnder Kleinrhythmus

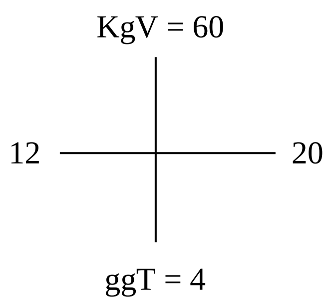
b) 20 – 40 – ***60*** – 80 – 100 – ***120*** – ⋯

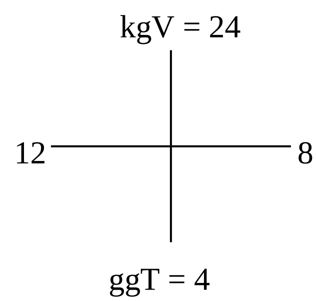
Obwohl die beiden Ausgangszahlen nicht groß sind, sehen wir erst die 60 als kleinste Zahl (*kleinstes gemeinsames Vielfaches: kgV*), in der die beiden Reihen sich begegnen und zusammenklingen; mit der (hervorgehobenen) Reihe 60 – 120 - ⋯ entsteht daraus der überbrückende Großrhythmus.

Wir sehen, dass auch hier beide Reihen von einem gemeinsamen Kleinrhythmus verbunden werden: die Vierer-Reihe ist in beiden enthalten. Sie wird in Dreier-Schritten übersprungenen vom Zwölfer und in Fünferschritten vom Zwanziger. Die Frage nach einem gemeinsamen Vielfachen hängt eng damit zusammen, wie stark die Ausgangszahlen bereits untereinander verwandt sind, ob sie also untereinander gleiche Teiler enthalten, die den gemeinsamen Kleinrhythmus bilden.

Die Teiler von 12 sind: 2; 3; 4 und 6; diejenigen von 20 sind: 2; 4; 5 und 10. Gemeinsame Teiler von 12 und 20 sind 2 und 4, dabei ist 4 der größtmögliche (*größter gemeinsamer Teiler: ggT*). Er ist in 12 dreimal und in 20 fünfmal enthalten. Damit kennen wir aber auch schon die Bausteine für das kleinste gemeinsame Vielfache: Es muss neben 4 als ggT noch 3 (für die 12) und 5 (für die 20) enthalten. In der Zahl 60, die aus 4·3·5 als kgV entsteht, sind 12 und 20 erstmals gemeinsam enthalten.

Stellt man beide Beispiele zusammen als Bild vor die Schüler, kann man sie selber auf die Suche nach Zusammenhängen gehen lassen:





Dass bei beiden Beispielen ggT = 4 steht, ist natürlich kein allgemeines Gesetz, sondern zufällig durch die Wahl der beiden Zahlenpaare entstanden, die jeweils 4 enthielten. Als weiteren Tipp erinnert man notfalls daran, dass im Moment alle Zahlenbeziehungen multiplikativ aufgefasst werden. Dann müssten die Verbindungsgeraden die erhoffte Folgerung aufzeigen Waagrecht führt die Multiplikation sowohl beim Ausgangszahlenpaar a · b zum selben Ergebnis wie senkrecht beim Produkt aus ggT · kgV; im ersten Beispiel ergibt sich 12 · 20 = 240 = 4 · 60 und im zweiten 12 · 8 = 96 = 4 · 24.

Eine bildhaft geschilderte Regel für Schüler kann dann heißen:

Wenn man die beiden Zahlen direkt miteinander multipliziert, entsteht das gleiche Produkt wie beim Multiplizieren von ihrem größten gemeinsamen Teiler und ihrem kleinsten gemeinsamen Vielfachen.

Im algebraischen Verständnis des Lehrers heißt es in Kurzform:

Das Produkt zweier Zahlen a und b ist gleich dem Produkt aus ihrem größten gemeinsamen Teiler und ihren kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen:

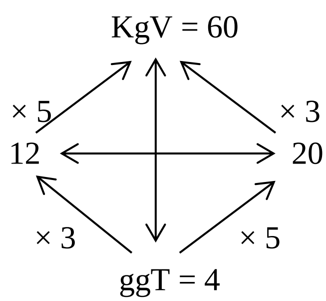
a × b = ggT (a ; b) × kgV (a ; b).

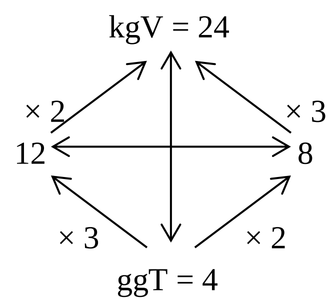
Diese Gesetzmäßigkeit lässt erkennen, dass das kgV zweier Zahlen a und b im Verhältnis zu ihnen umso *größer* ist, je *kleiner* der ggT dieser beiden Zahlen ist.

Der ungünstigste Fall tritt ein, wenn zwei Zahlen außer 1 keinen echten Teiler gemeinsam haben. Sie heißen *teilerfremd*; mathematisch korrekt benennt man bei ihnen den größten gemeinsamen Teiler mit 1. Ist nun der größte gemeinsame Teiler zweier Zahlen nur 1, dann nimmt das kleinste gemeinschaftliche Vielfache den größtmöglichen Wert an, nämlich das Produkt dieser beiden Zahlen selbst:

Ist ggT (a ; b) = 1, dann ist kgV (a ; b) = a × b.

Der ganze Zusammenhang erschließt sich, wenn dazu auch die im zweiten Beispiel oben beschriebenen Wege vom ggT über die Ausgangszahlen hinauf zum kgV nachverfolgt werden:





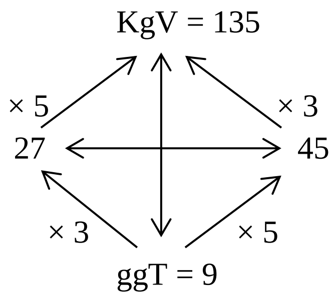
Vom ggT führt einmal links über die Ausgangszahl a ein Weg zum kgV, zum andern über die Ausgangszahl b; dabei sind nur die Pfeile links–rechts getauscht. Im Beispiel 12–20 heißt es auf dem linken Weg: 4 · 3 = 12 (Ausgangszahl a) und weiter 12 · 5 = 60. Auf dem rechten Weg ergibt sich: 4 · 5 = 20 (Ausgangszahl b) und weiter 20 · 3 = 60. Parallele Pfeile tragen jeweils denselben Multiplikator auf Aufsteigerzahl. Diese Vorgehensweise können wir im zweiten Beispiel ebenfalls nachvollziehen.

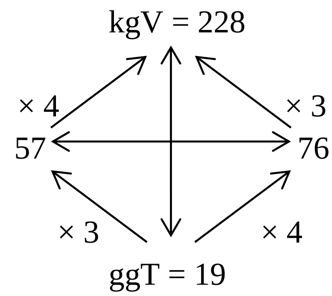
Rechenhilfen für das kgV

Weil gemeinsame Teiler meistens leicht aufzufinden sind, ist der ggT gut zugänglich. Das kgV ist dagegen viel schwerer einzuschätzen und zu prüfen. Doch können wir mit dem eben Gesagten einen gangbaren Weg bereiten. Für das Paar a = 12 und b = 20 braucht es keine Rechenkünste, um 4 als ggT zu entdecken. Mit der Fragestellungen 4 · ? = 12 und 4 · ? = 20 bekommen wir die beiden Aufsteigerzahlen 3 und 5, die wir nun vertauscht auf a und b anwenden: 12 · 5 = 60 oder auch 20 · 3 = 60.

Nur wenige Schüler werden in der Lage sein, zum Paar a = 27 und b = 45 ein gemeinsames Vielfaches und noch weniger das kleinste gemeinsame Vielfache angeben zu können. Doch mit dem eben entwickelten Verfahren geht es recht einfach. Überprüft man die Teiler, so ist 9 als ggT rasch entdeckt. Als Aufsteigerzahl vom ggT eignet sich 3 nach 27 (= 9 · 3) beziehungsweise 5 nach 45 (= 9 · 5), danach wenden wir sie vertauscht auf a und b an und erhalten aus 27 · 5 oder 45 · 3 das kgV = 135.

Selbst bei Zahlen, die aus den Einmaleins-Reihen nicht vertraut sind, lassen sich mit Hilfe der Teilbarkeitsregeln auch ungewöhnliche Teiler bloßlegen. Beim Paar a = 57 und b = 76 entdeckt man bei 57 mit der Quersumme 5 + 7 = 12 die Teilbarkeit durch 3 mit dem Ergebnis 57 : 3 = 19 und bei 76 erreicht man nach zweifachem Halbieren (Division durch 4) ebenfalls 19. Die zugehörigen Aufsteigerzahlen sind dann 3 und 4; sie führen mit $57 \cdot 4$ oder $76 \cdot 3$ zum kgV 228.





Wirklich schwierig wird es erst, wenn eine Zahl zwei oder mehr Primzahlen über 11 enthält. Weil aber nur die gemeinsamen Teiler interessieren, spielt es gar keine Rolle, wenn man bei dem schwierigeren der beiden Zahlen nicht alle Teiler erkennt, sofern sie nur diesem einen angehören. Problematisch würde es nur, wenn beide aus hohen Primzahlen aufgebaut wären[41]. Doch dies wird der Lehrer bei seiner Aufgaben-Stellung vermeiden[42].

Übungen

Bestimme zu den folgenden Zahlenpaaren:

a) 12 und 18; b) 9 und 15; c) 15 und 30; d) 24 und 36; e) 25 und 35;
f) 27 und 51; g) 13 und 39.

1. den ggT und das kgV
2. Zeige, dass stets das Produkt der beiden Zahlen gleich dem aus ihrem kgV und ggT ist.

Mehrere Rhythmen

Was hier für zwei Zahlenrhythmen entwickelt wurde, könnte im Prinzip auf mehr als zwei Rhythmen angewandt werden. Hat man es zum Beispiel mit den drei Rhythmenzahlen 8, 12 und 16 zu tun, dann kann man zunächst die Zusammenklangzahl als kgV von 8 und 12 bestimmen − das ist 24 – und dann die Zusammenklangzahl als übergeordnetes kgV von 24 und der 3.Zahl 16 – das ist 48 – angeben. Die Zahl des harmonisierenden Rhythmus, der ggT, kann zunächst aus 8 und 12 – der ist 4 – und dann von 4 und der 3.Zahl 16 – der ist hier auch 4 – bestimmt werden. Allerdings gilt hier nicht mehr, dass das Produkt kgV × ggT gleich dem Produkt der Ausgangszahlen ist. Die Verhältnisse werden komplizierter und ihre Behandlung lohnt sich auch nicht, weil im Folgenden dazu praktikable Verfahren entwickelt werden.

Die Primfaktoren einer Zahl

Wir haben bisher die Gemeinsamkeiten von Zahlen vor allem durch die ihren Zahlenreihen innewohnenden Rhythmen betrachtet. Bei ungünstigen Paarungen sind diese Rhythmen kaum

[41] Ein sicheres Verfahren, das zu zwei Zahlen immer den größten gemeinsamen Teiler liefert (auch wenn große Primzahlen verborgen sind), ist der „Euklidische Algorithmus“. Schon wegen seiner Einschränkung auf Zahlen-Paare lohnt er sich für das Bruchrechnen nicht. Interessierte Leser finden ihn dargestellt in L. Locher-Ernst a.a.O., S. 260

[42] Die ersten Zahlen mit Primfaktoren nur über 11 – und damit zu meiden – sind: $13^2 = 169$; $13 \cdot 17 = 221$; $13 \cdot 19 = 437$; $17^2 = 289$; $13 \cdot 23 = 299$; $17 \cdot 19 = 323$; $17 \cdot 23 = 391$. Große Zahlen sind in Kl.5 nur verwendbar, wenn sie durch Halbieren oder Dritteln rasch auf unter 100, also in den Bereich des kleinen 1×1, reduzierbar sind.

mehr erlebbar, bei mehr als zwei Zahlen wird zudem das Verfahren unübersichtlich. Bereits einleitend lernten wir das Innenleben von Zahlen kennen, als wir alle ihre Teiler aufgelistet hatten. Die betreffende Zahl notierten wir als Produkte der gefundenen Teilerpaare. Bei 20 waren dies die Kombinationen: $1·20$; $2·10$; $4·5$; $5·4$; $10·2$ und $20·1$.

Dies führen wir nun weiter, indem wir auch noch die Teiler selber nacheinander systematisch aufgliedern. Zerlegen wir dann noch eine zweite Zahl in deren Teiler, so können wir die Gemeinsamkeiten der beiden Zahlen schnell und sicher feststellen.

Schon aus der Geschichte der springenden Pferde kennen wir die Primzahlen als die bedauernswertesten Zahlen, weil sie von aller Welt gemieden werden. Anlässlich der Ermittlung des Zahleninhaltes gingen sie völlig leer aus, ebenso bei der Verleihung der Titel arm, reich oder gar vollkommen, weil sie eben keinerlei Teiler (außer 1 und sich selbst) besitzen. Genau darin liegt aber ihre innere Stärke und versprochen war auch, dass ihr wahrer Wert erst zu entdecken sei.

Tatsächlich erscheinen sie uns nur auf den ersten Blick als arm, denn sie ruhen in einer ungewöhnlich starken Selbständigkeit. Sie sind nicht auf andere Zahlen als Inhalt oder Bausteine angewiesen, setzen aber ihrerseits als Grundbausteine alle anderen Zahlen zusammen.

Aufgliederung von Zahlen

Bei einer *Zerlegung* einer Zahl in ihre Primfaktoren gliedern wir sie schrittweise in Faktoren auf, und zwar so lange, bis nur noch Primzahlen vorliegen. Wir versuchen einige Beispiele gemeinsam an der Tafel, um allen Schülern das Ziel klar zu zeigen, etwa bei der Zerlegung von 20. Ein erster Vorschlag könnte heißen:

> $20 = 2 \times 10$; dann lässt sich die 10 nochmals untergliedern in $10 = 2 \times 5$. Kleiner geht es nicht mehr, weil nun alle Faktoren Primzahlen, also frei von weiteren Teilern sind. Wir können daher die 20 als Produkt von kleinsten Anteilen schreiben: $20 = 2 \times 2 \times 5$.

Bei weiteren Beispielen darf jeder Schüler seinen eigenen Weg bis zur Primzahlzerlegung finden.

Eindeutigkeit der Zerlegung

Eine wichtige Erfahrung wird sein: Es sind unterschiedliche Rechenwege möglich und die Ergebnisse können verschieden aussehen, tatsächlich aber ist nur die Reihenfolge der gefundenen Faktoren verschieden. Hat jemand nämlich die Zahl 20 in folgenden Schritten zerlegt:

> $20 = 5 \times 4$ und sieht danach die weitere Teilbarkeit mit $4 = 2 \times 2$ zum Gesamtbild
>
> $20 = 5 \times 2 \times 2$.
>
> Ordnet man am Schluss geeignet um, ergeben sich unabhängig vom Vorgehen immer *dieselben Primfaktoren*.

Je größer die Zahlen werden, umso mehr lohnt es sich aber, einen systematischen Weg einzuschlagen, der sicher zum Ziele führt. Wie im Leben und Lernen beginnt auch hier der schwerste Weg immer mit dem kleinsten Schritt zuerst.

Systematik der Zerlegung

Wir schauen also zunächst, ob die Zahl gerade, also durch 2 teilbar ist. Wenn ja, halbieren wir sie. Ist das Ergebnis wieder eine gerade Zahl, setzen wir das Halbieren fort, bis wir eine ungerade Zahl erreicht haben. Ob dann eine 3 enthalten ist, sehen wir an der Quersumme und teilen dann gegebenenfalls, wenn es geht auch mehrfach, bis keine 3 mehr enthalten ist. In der Regel ist dann von der zu untersuchenden Zahl nur noch ein überschaubarer Anteil übrig. Diesen bearbeiten wir mit der Folge der aufsteigenden Primzahlen weiter und versuchen zu dividieren durch 5; 7; 11 und so weiter, bis wir als Ergebnis eine Primzahl erreichen, also nicht mehr weiter teilen können (außer durch diese selbst). Das klingt recht schwierig, wenn man bis zu großen Primzahlen weitergraben soll; doch im Alltag und auch bei uns in der 5. Klasse werden diese meist leicht enttarnt.

Darstellungsformen der Primzahlzerlegung

Mögliche Schreibweisen

Weil wir unseren Weg durch fortgesetztes Dividieren beschreiten, aber am Ende als Gesamtbild ein Produkt anschauen, sind dafür auch zwei Schreibweisen möglich; diese ergeben mit dem Beispiel 126 folgende Darstellungen:

a) Fortgesetzte Reduzierung durch Division	b) Fortgesetzte Aufspaltung als Produkt
126 : 2 = 63	126 = 2 × 63
63 : 3 = 21	126 = 2 × 3 × 21
21 : 3 = 7	126 = 2 × 3 × 3 × 7

Dabei kann die Division als vereinfachte Tabelle geschrieben werden, indem das jeweilige Ergebnis sofort darunter geschrieben wird zur weiteren Bearbeitung. Teilt man schließlich auch noch durch die letzte Primzahl, so sind alle Faktoren als Teiler aufgelistet und die verbleibende 1 sagt aus, dass die Aufgabe beendet ist. Auch die fortgesetzte Aufspaltung als Produkt von Primfaktoren kann vereinfacht und in einer Zeile geschrieben werden.

126 : 2
63 : 3
21 : 3
7 : 7
1

126 = 2 × 63 = 2 × 3 × 21 = 2 × 3 × 3 ×7

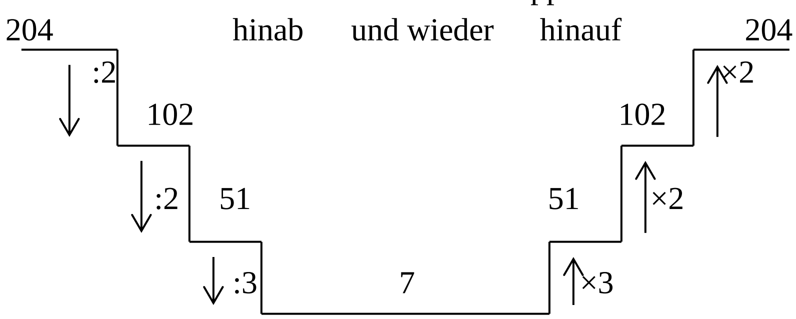
Primzahltreppe

Wir hatten einleitend die Bildhaftigkeit als Signum für den Unterricht in der Klasse 5 betont, ebenso den Wert von rekursiven Verfahren im Rechnen. Für die fortgesetzte Abspaltung der Teiler lassen sich grafische Darstellungen finden, welche für die Schüler überzeugend sind.

Eine erste Möglichkeit stellt die Primzahltreppe dar, wobei die immer kleiner werdende Zahl mit dem niedriger werdenden Niveau der einzelnen Auftritte verbildlicht wird. Beim Abstieg wird von Stufe zu Stufe eine Primzahl herausdividiert, beim Wiederaufstieg baut sich schrittweise das Primzahlprodukt auf bis zur kompletten Zahl.

Das folgende Beispiel nimmt sich die Zerlegung von 204 vor, wobei die beim Rechnen ungeliebte Primzahl schließlich alleine auf dem Boden stehend übrigbleibt.

Die Primzahltreppe



Der Teilerbaum oder: Primzahlen abkoppeln

Eine andere bildhafte Darstellung der schrittweisen Aufgliederung in Primfaktoren gelingt entlang der Verzweigung eines Baumes: Mit jedem Seitenast wächst eine Primzahl heraus, der weiter strebende Stamm verjüngt sich immer mehr bis zum Gipfel 1. Der Rechenweg vereint in der Abbildung die Idee der fortgesetzten Division mit derjenigen des Aufspaltens in (Teil-)Produkte.

Für die grafische Durchführung im Heft müsste die zu untersuchende Zahl unten stehen, damit der Baum und seine Zweige sich nach oben entfalten können. Wieviel Platz man dafür einräumen muss, ist jedoch nicht voraussehbar. Günstiger wäre, die Verzweigung nach unten zu zeichnen. Das Bild dazu entspricht dann der

Gleisharfe des klassischen Güterbahnhofs.

Letzterer ist vermutlich nur noch wenigen bekannt, es sei denn, sie sind Dampfbahn- oder Modellbahn-Begeisterte. Nacheinander zweigen Abstellgleise ab, auf denen bei uns die Waggons mit den entdeckten Primzahlen ausgeleitet werden; abgekoppelt wird durch Abspalten (dividieren) des jeweils gefundenen Teilers. Hinter diesen können wir das Multiplikationszeichen setzen als Erinnerung, dass in dieser Zeile im Produkt die Zahl davor erkennbar ist.

Diese Darstellung hat sich auch im Unterricht gut bewährt, weil die fortgesetzte Abkopplung von Teilern den Zahlenzug laufend verkürzt; man könnte sogar die am Schluss allein verbleibende 1 als Lok auffassen. Wir benutzen nochmals die anfangs untersuchte Zahl 126, um das Prinzip zu zeigen:

126 $= 2 \times 3 \times 3 \times 7$ Ergebnis
(als Produkt der abgespaltenen Faktoren)

2 × 63

3 × 21

mit 7 ist eine Primzahl erreicht,

3 × 7 die Zerlegung ist damit vollständig; .

oder fortsetzen bis 7 × 1 um zu zeigen, dass das Ziel erreicht ist.

Das Ergebnis wird danach als Primzahlprodukt in der ersten Zeile angefügt (siehe oben).

Selbst wenn in einer zu untersuchenden Zahl ein schlecht zu erkennender Prim-Anteil enthalten ist, wird er durch die vorgeschlagene Systematik noch leicht entdeckt, weil er als letzter übrigbleibt, wie am Beispiel von 306 gezeigt werden kann:

306 $= 2 \times 3 \times 3 \times 17\ (\times 1)$

2 × 153

3 × 51

3 × 17

17 × 1

Zahlen knacken

Um bei Nüssen an den Kern zu kommen, muss man die Schale knacken. Bei Walnüssen kann man manchmal den ganzen Kern auf einmal heraus bekommen. Aber oft kommt es vor, dass man zwar die Schale als zwei Wölbungen gut aufbekommt, der Nusskern darin aber noch innig eingebunden bleibt und sich nicht heraus lösen lässt. Man muss die Nussschale also noch mehrfach weiterknacken, bis der ganze Inhalt in Teilportionen entnehmbar wird.

Genauso geht es uns mit den versteckten Anteilen im Kern von Zahlen. Wir versuchen, die Teile(r) als Primzahlen heraus zu bekommen, bis wir die 1 als letzte Spur des Zahlennusskerns bloß gelegt haben. Das Verfahren eignet sich als mündliches Zahlenspiel beim Kopfrechnen. Eine Gruppe bekommt ihre Zahlennuss (beispielsweise 126) genannt. Pantomimisch erhält der Erste die Nuss in seine Hand. Er versucht, ob er sie halbieren kann. Ja, es geht; also halbiert er und gibt die (Zahlen-)Hälfte weiter an seinen Nachbarn; der Gruppe sagt er: „Ich bin der Teiler 2" oder „bei mir bleibt der Teiler 2" und „ich gebe vom Kern den verbleibenden Anteil 63 weiter". Der Nachbar klopft die erhaltene Zahl ab, ob nochmals eine 2 enthalten ist – nein; also versucht er es mit der 3, die er als Teiler an sich nehmen kann. Der Dritte kann nochmals eine 3 für sich behalten und der Vierte erhält 7 und sagt: „7 ist Primzahl, wenn ich sie mir herausnehme, bleibt nur noch die 1: Die Zahl ist vollständig geknackt!" Der nächste Schüler in der Reihe darf dann das gefundene Ergebnis zusammenstellen: „Die Zahl 126 besteht aus 1-mal", dann zeigt er nacheinander auf seine Vorgänger, die jeweils ihren Teiler nennen, also „7-mal", „3-mal", „3-mal", „2-mal" und ergänzt nur noch: „das ist die ganze Zahl!"

Vom Bild der Nuss wird man sich rasch lösen und nur kurz formulieren: „Ich nehme (von 126) den Teiler 2 heraus und gebe 63 weiter" – „ich nehme die 3 und gebe 21 weiter" und so fort.

Anwendungsbereiche

Abgesehen davon, dass mit der Primzahlzerlegung der innere Aufbau der Zahl sichtbar wird, können nun auch Verwandtschaften zwischen Zahlen sicher und vor allem viel einfacher entdeckt werden. Die mittels Zahlenrhythmen aufgefundenen Gemeinsamkeiten, also größter gemeinsamer Teiler und kleinstes gemeinsames Vielfaches – sind nun bequem aufzuspüren, auch noch dann, wenn mehr als zwei Zahlen auf ihre Gemeinsamkeiten überprüft werden. Wir erwarten damit vor allem für das Bruchrechnen wertvolle Hilfestellungen:

- Beim Kürzen eines unhandlichen Bruches. Dazu benötigten wir den *größten gemeinsamen Teiler (ggT)* von Zähler und Nenner als bestmögliche *Kürzungszahl*.
- Um Brüche vergleichbar zu machen – etwa zum Addieren oder Subtrahieren. Dazu bedarf es eines gemeinsamen Nenners: den *Hauptnenner*. Den bestmöglichen, also den kleinstmöglichen, liefert das *kleinste gemeinsame Vielfache (kgV)* der beteiligten Einzelnenner.

Die Primzahlzerlegung ermöglicht nun für beide Aufgabenstellungen sichere und gut gangbare Wege. Die dadurch erkennbaren Kürzungsmöglichkeiten – dann auch bei mehr als zwei Zahlen – werden hauptsächlich innerhalb der multiplikativen Behandlung von Brüchen (Multiplikation und Division) aufgesucht. Ebenso lässt sich damit für die additive Bearbeitung ein verlässliches Verfahren entwickeln, mit dem der benötigte Hauptnenner aufgefunden wird, auch bei mehreren Brüchen und in schwierigen Fällen.

Insbesondere ergeben sich damit auch die *Verwandtschaften bei mehreren Zahlen* (ggT und kgV), die hier mit Verweis auf den folgenden Abschnitt nicht mehr weiter geführt werden.

Beispiele

1. für Zerlegungen (als Übungsmaterial, für Hausaufgaben, Stillarbeit, spielerische Gruppenarbeit): a) 54; b) 64 c) 112 d) 126 e) 135 f) 693
2. Teilerreiche Zahlen ergeben besonders lange Primzahlketten:

a) 36 b) 60 c) 72 d) 120 e) 144 f) 150 g) 180 h) 240 i) 360

Bruchrechnen I: Addition und Subtraktion

Im Bruchrechnen der 4. Klasse wurde versprochen, dass die Multiplikation und Division mit Brüchen erfreulich leicht von statten gehen würde, und für die schwerer zu bewältigende Addition und Subtraktion würden praktikable Hilfsmittel entwickelt. Letzteres soll nun unternommen werden. Sofern die in Klasse 3 und 4 gepflegten Zahlenrhythmen gemäß des obigen Kapitels „Zahlenverwandtschaften" weitergeführt wurden über größten gemeinsamen Teiler und kleinstes gemeinsames Vielfaches bis hin zur Primzahlzerlegung, sind dazu auch alle nötigen Grundlagen vorbereitet. Falls dies nicht erfolgt ist, muss mindestens letztere in geeigneter Form – etwa mit den Methoden „Primzahlen abkoppeln" oder „Zahlen knacken" – so nachgeholt werden, dass Zahlen als Produkt ihrer Primzahlen geschrieben werden können.

Vorwissen aus der 4. Klasse

Wir erinnern daran, dass die Addition und Subtraktion nur bei gleichartigen Dingen möglich ist. Von gleicher Art waren Brüche dann, wenn sie gleiche Namen trugen, also gleiche Nenner aufwiesen. Ist diesem Fall durften wir einfach mit ihren Zählern arbeiten und den Nenner unverändert beibehalten:

13/20 – 7/20 = 6/20 (und anschließend gekürzt auf 3/10)

Weil Brüche oft verschiedene Nenner hatten, brachten wir sie erst auf einen gemeinsamen Nenner. Dieser musste erst bekannt sein, damit man gezielt auf ihn erweitern konnte:

8/15 + 3/10 = 16/30 + 9/30 = 25/30 = 5/6

In seltenen, dann aber günstigen Fällen, ist dies auch durch Kürzen möglich. So kann bei:

$$\frac{9}{15}-\frac{2}{10}$$

der erste Bruch mit 3 und der zweite mit 2 gekürzt werden und beide haben danach den Namen Fünftel; weil sie nun gleichnamig sind, können wir sie verrechnen:

$$\frac{9}{15}-\frac{2}{10}=\frac{3}{5}-\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$$

Der Hauptnenner

In der Regel müssen wir die Brüche aber *zum Hauptnenner erweitern*. Er muss die vorgegebenen Einzelnenner enthalten. Den bestmöglichen fanden wir daher im *kleinsten gemeinsamen Vielfachen (kgV)* aus den ursprünglichen Einzelnennern – oder bei unserer rhythmologischen Betrachtungsweise mit der *Zusammenklangszahl*. Die Anzahl der Schritte in den Zahlenreihen bis zum Zusammenklang lieferte auch die Zahlen, mit denen die Einzelnenner zum Hauptnenner erweitert wurden, oder wir erfuhren sie mit der Frage: *Wie oft ist der Einzelnenner im Hauptnenner enthalten?* An etlichen Beispielen mit einfachen Brüchen, bei denen der gemeinsame Nenner gut sichtbar ist, erkennen die Schüler das prinzipielle Vorgehen wieder. Bei:

$\frac{5}{12}-\frac{3}{20}$ bestimmen wir als Hauptnenner die Zusammenklangszahl oder das kgV von 12 und 20: Die 12 führt im 5.Schritt zu 60 und trifft dort mit der 20 in derem 3.Schritt zusammen; dementsprechend erweitern wir auch mit 5 bzw. 3:

$$\frac{5}{12}-\frac{3}{20}=\frac{5\times 5}{12\times 5}-\frac{3\times 3}{20\times 3}=\frac{25}{60}-\frac{9}{60}=\frac{25-9}{60}=\frac{16}{60}=\frac{4}{15}$$

Aufgaben zur Wiederholung

1. Suche jeweils erst den gemeinsamen Nenner, erweitere auf ihn und rechne dann:

a) 3/20 + 6/25 b) 7/12 – 4/15 c) 5/24 + 8/9 d) 3/14 – 2/21

2. Rechne geschickt, indem du zuvor mögliche Kürzungen vornimmst. Manchmal lässt sich auch das Ergebnis kürzen; wenn es größer als 1 wird, wandle es in eine gemischte Zahl um:

a) 10/12 – 4/9 b) 6/20 + 7/15 c) 8/15 + 6/20 d) 15/45 + 57/60

Die Hauptnenner-Suche

Spätestens bei Brüchen, deren Nenner kaum mehr Verwandtschaften zeigen, wird die Suche nach dem Hauptnenner mühsam. Noch größer wird die Erschwernis, wenn in der Aufgabe mehr als zwei Brüche mit unpassenden Nennern beteiligt sind. In solchen Fällen hilft uns nun die Zerlegung in Primfaktoren.

Von den Primfaktoren zum Hauptnenner

Beim letzten Beispiel:

$\frac{5}{12}-\frac{3}{20}$ fanden wir noch relativ einfach zum Hauptnenner durch das gut erkennbare kleinste gemeinsame Vielfache der beiden Einzelnenner: kgV (12 ; 20) = 60. Dies bestätigen auch die Primfaktoren:

$2 = 2 \times 2 \times 3$ und $20 = 2 \times 2 \times 5$

Darin kommen beide Male die Faktoren 2×2 vor; sie führen zum größten gemeinsamen Teiler: ggT (12 ; 20) = $2 \times 2 = 4$. Beim kleinsten gemeinsamen Vielfachen verzichten wir auf genau diese Mehrfachnennung und benutzen nur die absolut zwingenden Anteile:

kgV (12 ; 20) = $2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60$.

Dies ist auch der gesuchte Hauptnenner, weil dessen Primfaktoren auch jeden Einzelnenner aufbauen können.

Der Primzahlbaukasten

Übersichtlicher wird unser Vorgehen, wenn wir die Primfaktoren als Bausteine auffassen, mit denen wir sowohl die Einzelnenner als auch den Hauptnenner zusammenstellen können. Wie bei jedem Spielzeugbaukasten genügt es, wenn jedes Baumodell einzeln aus dem Kasten bedient werden kann, aber nicht alle gleichzeitig.

Die uns vorliegenden Nenner spalten wir schrittweise in das Produkt ihrer Primzahlen auf.

Wir schreiben die Nenner untereinander (in der ersten Spalte) und jeweils dahinter ihre Primfaktoren. Für diese erstellen wir während des Eintrags die nötigen Fächer:

Nenner	Primfaktoren		
12	2	2	3

Beim nächsten Nenner sortieren wir wiederkehrende Primfaktoren in die bereits vorhandenen Fächer ein oder fügen notfalls neue hinzu:

Nenner	Primfaktoren			
12	2	2	3	
20	2	2		5

Der Hauptnenner – und damit das kleinste gemeinsame Vielfache – ergibt sich automatisch, wenn die Primfaktoren aller Fächer miteinander multipliziert werden.

Nenner	Primfaktoren			
12	2	2	3	
20	2	2		5
HN = 60	2	2	3	5

Für die beiden Nenner 12 und 20 genügt ein Baukasten mit 4 Elementen, um (mit der richtigen Auswahl) jeden der beiden bauen zu können. Benutzen wir diese alle gleichzeitig, so erhalten wir den Hauptnenner, indem wir alle vorhandenen Primfaktoren multiplizieren.

Hauptnenner von mehreren Brüchen

Vor allem bei mehr als zwei Brüchen ist es vorteilhaft, wenn wir die Primzahl-Anteile in den eben geschilderten Baukasten einsortieren. Damit erreichen wir ein geeignetes Schema, in dem alle Teiler systematisch aufgelistet sind und keiner wird übersehen.

Das folgende Beispiel wäre zwar auch noch ohne unser neues Schema lösbar, aber es lässt bereits dessen große Vorteile erkennen:

$^3/_8 - {}^1/_{12} + {}^2/_{15} + {}^3/_{20} = ?$

Auf die vier beteiligten Nenner wenden wir wie bisher die fortgesetzte Aufspaltung als Primzahlprodukt an.

Wir tragen die Nenner in der ersten Spalte unseres Baukastenschemas ein und beginnen mit der Zerlegung des ersten Nenners: $8 = 2 \cdot 4$; wir tragen 2 in die erste Folgespalte ein. Die verbliebene 4 wird weiter zerlegt in $2 \cdot 2$, wodurch die nächsten zwei Spalten belegt werden. Dasselbe folgt beim 2. Nenner 12. Dieser liefert $2 \cdot 2 \cdot 3$, wobei die 2er-Fächer bereits vorhanden sind, aber ein 3er-Fach als neue Spalte dazu kommt. Der 15er benötigt noch 5 als ergänzendes Fach, die nachfolgende 20[43] findet bereits ausreichend Fächer vor.

Nenner	Primfaktoren				
8	2	2	2		
12	2	2		3	
15				3	5
20	2	2			5
HN = 120	2	2	2	3	5

Die nötigen Spalten unseres Schemas entstehen also erst im Laufe der Rechnung, wir sehen daher ausreichend Platz dafür vor. In der untersten Zeile multiplizieren wir alle Primfaktoren zu $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 120$ und erhalten das kleinste gemeinsame Vielfache und damit den günstigsten Hauptnenner.

Für die eigentliche Rechnung fehlen uns jetzt nur noch die passenden Zahlen, mit denen wir die Einzelnenner zum Hauptnenner erweitern können. Doch diese sind im Schema bereits latent enthalten: In der Zeile des jeweiligen Nenners sind es alle nicht belegten Fächer, also diejenigen Primfaktoren, welche diesem Einzelnenner als Ergänzung zum Hauptnenner fehlen.

Am besten geht dies, wenn die fehlenden Ziffern mit Buntstift in die Tabelle ergänzt und deren jeweiligen Produkte rechts aufgelistet (in der folgenden Tabelle ***(kursiv)*** eingetragen) und anschließend zur Erweiterungszahl multipliziert werden:

Nenner	Primfaktoren					***Erweitern***
8	2	2	2	***(3)***	***(5)***	***15***
12	2	2	***(2)***	3	***(5)***	***10***
15	***(2)***	***(2)***	***(2)***	3	5	***8***
20	2	2	***(2)***	***(3)***	5	***6***
HN = 120	2	2	2	3	5	

[43] Eine geeignete Sprechweise könnte heißen: „20 ist 2 × 10; schreibe 2 ins erste Zweierfach, merke 10“; danach wird die verbliebene 10 eingeteilt in 2 × 5 mit „schreibe 2 ins nächste Zweierfach, merke 5“; 5 enthält nur noch sich selbst mit 5 × 1; „trage 5 in das Fünferfach ein“ und die verbliebene 1 sagt, dass die Zerlegung fertig ist.

Damit kann nun die Aufgabe bearbeitet werden:

$^{3}/_{8} - {}^{1}/_{12} + {}^{2}/_{15} + {}^{3}/_{20} \quad = {}^{3x15}/_{8x15} - {}^{1x10}/_{12x10} + {}^{2x8}/_{15x8} + {}^{3x6}/_{20x6}$

$= {}^{45}/_{120} - {}^{10}/_{120} + {}^{16}/_{120} + {}^{18}/_{120} = {}^{69}/_{120} = {}^{23}/_{40}$

Formelformat Sh: Alternativ-Darstellung , dann aber Rc-Zeilen synchron untereinander, evt. rechtsbündig wie oben:

$$\frac{3}{8}-\frac{1}{12}+\frac{2}{15}+\frac{3}{20}=\frac{3\times15}{8\times15}-\frac{1\times10}{12\times10}+\frac{2\times8}{15\times8}+\frac{3\times6}{20\times6}=$$

$$\frac{45}{120}-\frac{10}{120}+\frac{16}{120}+\frac{18}{120}=\frac{45-10+16+18}{120}=\frac{69}{120}=\frac{23}{40}$$

Mit diesem Schema ist ein zuverlässiges Verfahren bereit gestellt, mit dem die Schüler bereits nach einigen wenigen gemeinsam durchgeführten Übungen völlig selbständig arbeiten können. Selbst bei Nennern mit einfachen Zahlen kann das Schema für schwächere Schüler eine wertvolle Stütze sein, mit der sich Fehler vermeiden lassen.

Aufgaben

1. $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}$
2. $\frac{5}{6}+\frac{3}{8}+\frac{1}{9}$
3. $\frac{1}{20}+\frac{1}{40}+\frac{1}{60}+\frac{1}{80}+\frac{1}{100}$
4. $\frac{10}{7}+\frac{20}{11}+\frac{30}{13}$

Da alle Nenner Primzahlen sind, erübrigt sich hier die Primfaktorzerlegung. Alle Brüche sind sogenannte *unechte* Brüche. Gib beim Ergebnis die nächstliegende ganze Zahl an.

5. $\frac{12}{5}-\frac{5}{12}-\frac{7}{12}+\frac{12}{7}$ Gib das Ergebnis auch als gemischte Zahl an.
6. $\frac{16}{360}+\frac{54}{576}+\frac{72}{288}+\frac{36}{432}$ Hier lohnt es sich, zuerst zu kürzen.
7. $5-\frac{4}{8}-\frac{6}{12}-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}-\frac{12}{4}$

Bruchrechnen II: Multiplikation und Division von Brüchen

Vorbemerkung zur neuen Betrachtungsweise

Bereits bei der Hinführung zum Malnehmen mit Brüchen in der 2. Epoche der 4. Klasse klang an, dass sich der Blickwinkel verändert. Zwar wurde dort immer noch der *Bruch als Größe* aufgefasst, aber der erste Schritt hin zum *Bruch als Bearbeiter* anderer Zahlen erfolgte bereits bildhaft mit dem Ansatz der Teil-von-Beziehung als Vorstufe der Multiplikation mit einem Bruch. So führte die dinghafte Größe „½ Dutzend" zur Aussage „½ von 12" und über die Rechenzeile „½ · 12" zur 6 als Ergebnis einer Multiplikation. Betrachtet man diese letzte Zeile in umgekehrter Folge

$6 = ½ \cdot 12$

für sich alleine, kann man sie auch deuten als:

6 ist verglichen mit 12 nur noch die Hälfte – oder:

6 nimmt von 12 den Anteil ½

Auf diese Vielfalt der Betrachtungsweise darf sich der Sprachgebrauch im Unterricht der 5. Klasse schrittweise öffnen. Es werden damit zunehmend *Beziehungen zwischen Zahlen* oder ihre *gegenseitigen Verhältnisse* beschrieben. Dass dies nicht nur im mathematisch-ideellen Freiraum erfolgen muss, kann mit entsprechenden Alltagsbeispielen belegt werden. Die Empfindung der Verhältnismäßigkeit ist in der Lebenswirklichkeit Grundlage für viele Aussagen oder Urteile.

Dass die Befähigung zu dieser Betrachtungsweise altersrichtig in der 5. Klasse erwacht und daher auch eingesetzt und gefördert werden sollte, wurde bereits in der Einführung ausführlich geschildert und menschenkundlich begründet. *Rhythmus und Proportion*[44] sind geradezu das Signum dieses Alters, sie sollen aus einer zunächst bildhaften Empfindung sich zu einer neuen Weltsicht klären. Auch in der Mathematik werden nun neue Möglichkeiten und Blickweisen eröffnet; um den Unterrichtenden darauf einzustimmen, werden zunächst einige Motive dazu dargestellt.

Multiplikative Vergleiche

Unterschied

Wenn wir messbare Dinge vergleichen, so werden wir in der Regel zuerst auf Maß-Unterschiede (Längen, Flächen, Gewichte usw.) achten, ihre Unterschiedlichkeit also durch eine *Subtraktion* bestimmen als *Differenz*. Dabei setzen wir aber meist ähnliche Größenordnungen voraus, welche eine solche Vergleichbarkeit sinnvoll ermöglichen.

Wenn ein Rezept ½ Pfund Mehl verlangt und wir erst 230 Gramm Mehl auf der Waage haben, so fehlen noch 20 Gramm (Unterschied zwischen 230 und 250) bis zur gewünschten Menge. Eine Zugverbindung ist mit 2 ½ Stunden Laufzeit um ¼ Stunde schneller im Vergleich zu einer anderen mit 2 ¾ Stunden (Zeitunterschied ¼ Stunde).

Niemand wird aber einen solchen *additiven Vergleich* anstellen, wenn sich die beiden Größen erheblich unterscheiden, wenn eine der beiden Größen „viel mehr“ ist. Man ist sofort geneigt zu sagen, um „wie viel mal mehr“ die zweite Größe ist im „Vergleich“ zur ersten. Ein Kilogramm ist zwar um 750 Gramm schwerer als ein halbes Pfund, aber wir werden es eher als „viermal schwerer“ beschreiben.

Wenn wir einen Artikel im ersten Geschäft um 4,20 Euro gesehen haben und denselben im zweiten Geschäft für 3,95 Euro entdecken, so ist er dort um die „Differenz 25 Cent“ billiger. Erst mittels der Prozentrechnung würde hier ein relativer Vergleich sinnvoll möglich (und dann auch bevorzugt: „etwa 6% billiger“). Wenn aber dem eben genannten Preis von 4,20 Euro ein Sonderangebot von 2,10 € gegenüber steht, so wird man sagen, dass der zweite Preis „halb so hoch“ ist im Vergleich zum ersten, anstatt „um 2,10 € billiger“.

Verhältnis

Beim *multiplikativen Vergleich* wird die Ausgangsgröße als Maß der zweiten benutzt. Durch diesen Rückbezug relativieren wir und erreichen damit eine neue Qualität. Unser Beurteilungsmaßstab wird den Dingen selbst entnommen und ist so gesehen angemessener und damit sachgemäß. Wir beschreiben damit nicht mehr den Unterschied zweier Größen, sondern ihr *gegenseitiges Verhältnis*. Mit einem innerlich vergleichenden Mitempfinden werden Beziehungen zwischen äußeren physischen Tatsachen gestiftet.

[44] Siehe das gleichlautende Kapitel der Einleitung zu „Der Mathematik-Unterricht der 5. Klasse“

Es ist bezeichnend, dass *Rhythmen immer in Verhältnissen* und nie durch Differenzen verglichen werden: Eine Achtelnote dauert halb so lang wie eine Viertelnote, der Achtelrhythmus ist doppelt so schnell wie der Viertelrhythmus; eine Vierteltriole hat 2/3 von einer Viertelnote. Eher theoretisch erscheint dagegen die – taktmäßig korrekt gerechnete – Differenz von 1/6 Note zwischen der Viertelnote und der Vierteltriole. In der Musik stellt der reine Takt also eine additive Zeitmessung dar, während der Rhythmus den Zeitfluss innerlich zur Zeitgestalt gliedert. Die starke Bindung von rhythmischen Vorgängen an seelische Empfindungen kann äußerlich abstrakte (Bruch-)Rechnungen an innere Bewegungen (Emotionen) anschließen oder sogar die Bildung von Bruchteilen aus inneren musikalisch-rhythmischen Erlebnissen begründen.

Dieser Zusammenhang von beseelter Schönheitsempfindung geistigen Zahlenbeziehungen kann in der 6. Klasse (Physik: Akustik) noch gesteigert werden: Tonintervalle lassen sich als Verhältnisse von Saitenlängen beschreiben und es zeigt sich, dass Wohlklang mit harmonischen Zahlenverhältnissen korrespondiert.

Brüche als Vergleichsmaßstab

Die Fähigkeit zu rhythmischen Vergleichen lässt sich aus rein zeitlichen Vorgängen als Zahlenverhältnis übertragen auf alle Zahlengrößen und äußeren Maße. In der bildenden Kunst erscheint der Rhythmus als Raumgestalt[45]. Bis hin zum Erscheinungsbild von Figuren (Maßbeziehungen, Proportionen in geometrischen Formen) lassen sich Formen mit multiplikativen Vergleichen charakterisieren.

Daher ist der von Baravalle[46] vorgeschlagene Weg lohnenswert. Er leitet aus dem Bild zweier verschieden hoher Bäume unmittelbar den multiplikativen Größenvergleich ab: „... [wir vergleichen] *zwei Bäume, einer ist größer, der andere kleiner. Jeder ist ein ganzer Baum; der erste ist 3-mal so hoch als der zweite und der zweite 1/3 des ersten.*[47]" Eine sprachliche Brücke führt die Sprechweise „1/3 von der Höhe" über „1/3-mal so hoch" zur Möglichkeit „2/3-mal so hoch". Durch den wechselseitigen Vergleich kehrt sich das Verhältnis um: Wenn der kleine Baum 2/3 von der Höhe des großen hat, so hat der große Baum 3/2 des kleinen: *Wir messen die Größen gegenseitig*. Dieses bildhafte Vorgehen ermöglicht inhaltsvolle Vorstellungen als gesundes Fundament für Multiplikation und Division mit Brüchen. Die Division durch Brüche wird durch die Tätigkeit des Messens überhaupt erst ermöglicht. Die nötigen mathematischen Grundlagen dazu werden dann nochmals ausführlicher dargestellt.

Mehrfacher Vergleich

Der von Baravalle eingeschlagene Weg des multiplikativen Vergleichs lässt sich auf mehrere Größenvergleiche nacheinander anwenden: „*Der mittlere Baum ist 3/4 mal so hoch als der große und der kleine 2/3 mal so hoch als der mittlere. Der kleine Baum ist somit* $^3/_4 \times {}^2/_3 = {}^{3x2}/_{4x3} = {}^6/_{12} = ½$ *-mal so hoch als der große*." Allerdings benutzt auch Baravalle geeignete Teile als gemeinsames Maß (im genannten Beispiel also $^1/_{12}$), um den Größenvergleich anschaulich zu machen.

Ähnlich wie die Größenvergleiche lassen sich maßstäbliche Abbildungen als Beispiele dafür anfügen, dass sich deren Hintereinanderausführung die Multiplikation von Brüchen beschreibt. Wenn bei einem Fotokopierer eine Verkleinerung von 50% oder ½ eingestellt ist, werden alle

---

[45] Der Rhythmus architektonischer Gliederungen lässt sich an der Säulenordnung des griechischen Tempels und in den Maßbeziehungen der romanischen Basilika besonders gut wahrnehmen.

[46] Hermann von Baravalle: Rechenunterricht und der Waldorflehrplan, Stuttgart 1957

[47] a.a.O., S.71

(Längen-)Maße auf die Hälfte reduziert. Macht man nun eine Kopie von der Kopie, so betragen deren Größen nur noch $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ des Originals.

Das erstrebte Verständnis von mehrfach wiederholten Verhältnissen ist sicher ein lohnenswertes Ziel, stellt aber auch hohe Ansprüche an die Auffassungsgabe der Kinder. Die damit verbundene multiplikative Hintereinanderausführung von Operatoren lässt sich leichter an die nachfolgend schrittweise eingeführte Multiplikation anschließen. Für den Unterrichtenden ist damit aber das Umfeld bereitet, in das die nun zu behandelnden Rechenvorgänge eingebettet sind. Gleichzeitig kann obiger Abschnitt als Anregung und Fundus für eigene Wege und Aufgaben-Ideen dienen.

Wege zur Multiplikation

Zur Vorgehensweise

Wie bereits geschildert, werden für die Schüler der 5. Klasse anfangs die Brüche noch immer stark an Formen und Größen von anfassbaren Dingen gebunden sein: Zahlen (und Brüche) beschreiben für sie *Dinge der äußeren Welt*. Im Sachrechnen werden wir diese enge Bindung auch weiterhin benötigen und sie mittels geeigneter Maße unmittelbar anwenden. Dennoch pflegt der Waldorfunterricht in der Mathematik von Anfang an auch das rein zahlenmäßige Rechnen und nutzt dazu auch andere, *un-bedingte Zugänge*, vor allem über rhythmische Übungen.

Wenn im Folgenden neue Rechenschritte anhand konkreter Beispiele eingeführt werden, bedeutet dies nicht, dass es auch so in der Klasse gemacht werden muss, oder dass es nicht anders möglich ist. Gemeint ist vielmehr, dass für jeden Schritt in der realen Welt ein Bezug auffindbar ist. Bewährt sich ein Rechenweg als Problemlösung in diesem äußeren Beispiel, lässt er sich auch leicht davon lösen und im rein Zahlenmäßigen anwenden. Schüler, die ein rein mathematisches Vorgehen als zu abstrakt oder unverbunden erleben, erfahren in solch anschaubaren Bezügen hilfreiche Ankerpunkte.

Auch für Lehrer, denen das Bruchrechnen nicht gegenwärtig ist oder noch nie geläufig war, können die folgenden Hinführungen als Hilfestellung nützlich sein. Vor allem, wenn der Blick zurück auf das Bruchrechnen in der eigenen Schulzeit durch dunkle Wolken beeinträchtigt ist, kann nun manches erhellt werden, um damit gestärkt und frischen Mutes in die Klasse gehen zu können.

Im Übrigen muss im Rechenunterricht nicht alles und jedes bis ins Kleinste erklärt oder begründet werden. Oftmals genügen einige Rechenbeispiele mit überschaubaren oder gar sehr einfachen Zahlen, an denen das Prinzip deutlich und dann rasch zur Rechengewohnheit kann werden. Der Lehrer darf auch mal seiner Klasse einfach nur sagen: „Ich zeige Euch jetzt, wie man das macht“ – ganz ohne Begründung, wenn dann beim nachfolgenden Tun auf die Bezüge zum vorher Gelernten geachtet wird. Diese Verbindungsstellen sind daher auch entsprechend zu beleuchten; sie erhellen dann rückblickend den Zusammenhang. So kann die Empfindung für die Richtigkeit eines Sachverhaltes geweckt werden und auf natürliche Weise wachsen. Jede wie auch immer geartete – auch nachträgliche – Einbettung des Neuen in bereits Bekanntes stärkt das Vertrauen der Schüler, dass etwas stimmig ist: Dieses Erlebnis ist überzeugender als ein gut gemeinter mathematisch-logischer Beweis.

Es wird also Aufgabe des Lehrers sein, aus dem folgenden recht umfangreichen Angebot an Stoffen und unterschiedlichen Zugängen die für seine Klasse richtige Auswahl zu treffen und dennoch nichts Wesentliches auszulassen. Der nachfolgend recht kleinschrittige Weg darf zügig zum Ziel geführt werden: Die Multiplikationsregel für Brüche. Ist dieses allgemeine Gesetz nämlich erreicht, umfasst es alle vorher erklommenen Stufen als Einzelfälle.

Trotz aller Beispiele aus der Anschauung werden die Kinder erst dann mit Bruchzahlen frei umgehen können, wenn sie auch auf Gedächtnis und innere Vorstellungen zurückgreifen können. Dennoch werden wir uns bei neuen Schritten um passende Bilder für die Kinder bemühen. Zum Malnehmen und Teilen können dazu die später vorgeschlagenen Schöpfmaße und Knotenschnüre helfen; bei letzteren sind sogar Vielfache von Brüchen jeweils als Längenmaß durch Knoten fixiert.

Kopfrechnen: Einmaleins der Brüche

Der Augenschein wird zwar alle Schritte unterstützen, aber das freie Rechnen nicht ersetzten. Für die Rechenfertigkeit im Umgang mit Brüchen bleibt die tägliche Kopfrechen-Einlage im freien mündlichen Unterricht die wichtigste Hilfe. Besonders lohnenswert ist dabei nach wie vor die „Teil-von-Beziehung“ als bildhafte Multiplikation, als Binnenstruktur von Zahlen, als Zahlenreihung aus rhythmischer Untergliederung mit Blick auf Zahlenverwandtschaften.

Eine weitere interessante Möglichkeit ergibt sich, wenn das System der 1×1-Reihen auf Brüche überträgt. Damit können wir die Vielfachen von einfachen Bruchteilen im Kopfrechnen als Multiplikationsreihen entwickeln. Die Größenbeziehungen werden dadurch vertrauter und im Gedächtnis verankert – eine wertvolle Stütze bei allen Multiplikations- und Divisionsfragen. Ausgehend vom einfachsten Bruch ½ mit seinen Vielfachen: ½ ; $^2/_2$; $^3/_2$; $^4/_2$; $^5/_2$; ... gelangen wir mit geeignetem Kürzen zu einer wechselnden Reihe von ganzen und gemischten Zahlen. Der Schwierigkeitsgrad lässt sich steigern zur rhythmisch gegliederten Reihe der Sechstel. Anspruchsvoll und auch nur bedingt geeignet sind höhere Brüche in der Art wie $^3/_8$ oder gar $^5/_{16}$.

Übungen zum Kopfrechnen

Die Vorschläge können beliebig weiter geführt oder abgewandelt werden, sofern die benutzten Zahlen vorher auf leichte Rechenmöglichkeit (Teilbarkeit!) geprüft sind.

1) Die Teile einer Zahl werden aufgereiht

1a)	½ von 12 ist ?	$^2/_2$ von 12 sind ?	$^3/_2$ von 12 sind ?	$^4/_2$ von 12 ?
1b)	¼ v. 36 = ?	$^2/_4$ v. 36	¾ v.36	... weiter bis $^8/_4$ v. 36
1c)	1/9 v. 108 = ?	2/9 v. 108 =		... weiter bis 8/9
1d)	1/7 v. 105 = ?	2/7 v. 105 =		... weiter bis 6/7
1e)	1/12 v. 96	1f) 1/13 v. 39	1g) 1/11 v. 121	

2) Gleiche Anteile einer Zahlenreihe

2a)	¼ v. 8	¼ v. 12	¼ v. 16	... weiter
2b)	1/8 v. 24	1/8 v. 36		…
2c)	1/7 v. 7	1/7 v. 14	1/7 v. 21	…

3) Zahlenreihe als gleichbleibender Anteil

a)	5 ist $^1/_6$ von ?	6 ist $^1/_6$ von ?	7 ist $^1/_6$ von ?	8 ist $^1/_6$ v. ?
b)	4 ist 1/5 von ?	5 ist 1/5 von ?	...	
c)	3 ist 1/9 von ?	4 ist 1/9 von ?	...	

4) Vergleichbare Teile

Zwei Schülergruppen parallel:

4a)	I)	$^1/_8$ von 72 ist 9	$^2/_8$ von 72 sind 18	$^3/_8$ v. 72 = ?	$^4/_8$ v. 72 = ? ...
	II)	-Pause-	$^1/_4$ von 72 ist 18	-Pause-	$^2/_4$ v. 72 = ? ...
b)	I)	1/3 v. 72	2/3 v. 72	...	
	II)		1/6 v. 72	...	

c) I) 1/12 v. 144 2/12 v. 144 3/12 v. 144 ...

II) ¼ v. 144 ...

5) Fortgesetztes Halbieren

a) Halbiere immer weiter: 1 - ½ - $^1/_4$ - $^1/_8$ - ... (8 bis 10 Schritte)

b) $^1/_3$ - $^1/_6$ - $^1/_{12}$ - ... (6-8 Schritte)

c) $^1/_5$ - $^1/_{10}$ - $^1/_{20}$ - ... (6-8 Schritte)

6) Nimm immer ein Drittel (6-8 Schritte)

a) 1 - $^1/_3$ - $^1/_9$ - ...

b) $^1/_2$ - $^1/_6$ - $^1/_{18}$ - ...

c) $^1/_5$ - $^1/_{10}$ - $^1/_{20}$ - ...

d) $^1/_4$ - $^1/_{12}$ - ...

7) 1x1-Reihen für Brüche

a) Reihe der Halben: ½ ; 1 (=$^2/_2$) ; 1½ ; 2 ; 2½ ; ...

b) ¼ ; ½ ; ¾ ; 1 ;1¼ ...

c) 1/3 ;

d) 1/8 ;

e) Am interessantesten ist die Reihe der Sechstel:
$^1/_6$; $^1/_3$ (=$^2/_6$) ; ½ (=$^3/_6$) ; $^2/_3$ (= $^4/_6$) ; $^5/_6$; 1 ; 1$^1/_6$.; 1$^1/_3$; 1½ ...

7) Mehrere Zahlenbearbeiter nacheinander

Diese Art der Kettenrechnung war in einfacher Form bereits für die 4. Klasse vorgeschlagen. Jetzt soll der Blick den Rechengang als Ganzes überschauen und damit das Zusammenwirken der einzelnen Operatoren erkennen.

Vorgehensweise: Gruppen oder Einzelkinder bearbeiten nacheinander die Zahl, die jeweils unterwegs ist. Der Rest der Klasse rechnet mit und prüft die Ergebnisse. Ob sie danach auch die Gesamtwirkung aller Arbeiter feststellen können, wenn sie Anfang und Ende vergleichen? Ändert sich die Wirkung, wenn die Reihenfolge der Bearbeitung vertauscht wird?

a) Bearbeiter: Vervierfacher – Verfünffacher - Halbierer
(geeignet für alle Zahlen; Gesamtwirkung: 10-fach)

b) Bearbeiter: Halbierer – Vervierfacher ; oder kurz: ½mal – 4mal
(geeignet für gerade Zahlen; Gesamtwirkung: 2-fach)

c) Bearbeiter: 2mal – $^1/_4$mal
(geeignet für gerade Zahlen; Gesamtwirkung: ½)

c) Bearbeiter: nimm 10mal – nimm $^1/_4$ – nimm $^1/_5$
(geeignet für gerade Zahlen; Gesamtwirkung: ½)

d) Bearbeiter: nimm $^1/_5$ – 6mal – nimm $^1/_4$ – 10mal – nimm $^1/_3$
(geeignet für Zehner-Zahlen; Gesamtwirkung „neutral“: Anfangszahl ×1 = Endzahl)

Teile von Stammbrüchen (Stammbruch mal Stammbruch)

Schon aus der ersten Woche des Rechenunterrichts der 4.Klasse kennen die Kinder das fortgesetzte Halbieren (Falten eines Blattes, „Zweitelbaum“ und anderes). Mit einem entsprechenden Bild (Quadrat, Kreis oder Strecke) kann nochmals daran erinnert werden, wie man damit vom Ganzen über das Halben zum Viertel und danach Achtel kommt. Wir wollen aber immer mehr dazu kommen, dass Brüche nicht nur sichtbare Bruchstücke eines ursprünglich ganzen Dinges beschreiben, sondern zunehmend eine Tätigkeit. Außer als halbes Stück können wir ½ auch als *Bearbeiter* ansehen, der alle Dinge und Größen, also auch Zahlen und Brüche halbieren kann.

Im Prinzip sind die Grundlagen dazu bereits am Ende der 4. Klasse[48] gelegt und im Kopfrechnen angewandt worden, etwa in der Art: ½ von 14 ist 7" oder 3/5 von 15 sind 9". Wie ausführlich an dieser Stelle noch Vorbereitungen nötig sind oder ob eine kurze Erinnerung genügt, wird leicht abzuspüren sein.

Man sollte wenigstens mit einigen anschaulichen Beispielen darauf zurückgreifen können, etwa der Art:

> „Vier Kindern bekommen zusammen 80€ geschenkt. Allerdings wird das Geschenk hälftig auf Weihnachten und Ostern verteilt. Was bekommt ein Kind an Weihnachten davon?" Der Rechengang kann schrittweise erfolgen: „Ein Kind bekommt ein Viertel von 80€, also 20€; davon an Weihnachten die Hälfte, also 10€."

Nach oder mit weiteren Beispielen können mittels der „Teil-von-Beziehung" schreiben:

¼ von 80 ist 20 ; ½ von 20 ist 10

und nutzen die Schluss-Aussage mit der Formulierung:

Das Kind wird an Weihnachten davon nur ½-mal bedacht

als Zwischenstufe zur Multiplikation *½-mal nehmen* mit der Schreibweise:

$\frac{1}{2} \cdot 20 = 10$

Diese Art der Multiplikation sollte nun zur Gewohnheit werden und die bisherige Schreibweise „½ von 20 ist 10" als zwar gleichwertige, aber bequemere Form ersetzen. Unabhängig vom eingangs geschilderten Bild können wir damit auch im rein Zahlenmäßigen arbeiten:

$\frac{1}{4} \cdot 80 = 20$; $\frac{1}{2} \cdot 20 = 10$;

10 ist aber nur noch 1/8 von 80 und können also sagen:

Wenn wir das Viertel nur ½ - mal nehmen, erhalten wir ein Achtel

Wir schreiben

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = {}^{1}/_{8}$

und übertragen dies auf ganze Rechenketten, wie es bereits im Kopfrechnen vorgeschlagen wurde:

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$; $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = {}^{1}/_{8}$; $\frac{1}{2} \cdot {}^{1}/_{8} = {}^{1}/_{16}$; ...
$\frac{1}{2} \cdot {}^{1}/_{3} = {}^{1}/_{6}$; $\frac{1}{2} \cdot {}^{1}/_{6} = {}^{1}/_{12}$; $\frac{1}{2} \cdot {}^{1}/_{12} = \ldots$
${}^{1}/_{3} \cdot {}^{1}/_{3} = {}^{1}/_{9}$; ${}^{1}/_{3} \cdot {}^{1}/_{9} = {}^{1}/_{27}$; ${}^{1}/_{3} \cdot {}^{1}/_{27} = \ldots$

Falls aber noch Hürden bestehen, können wir immer noch in weiteren Beispielen die Bruchstücke anschaulich vergegenwärtigen:

Ein Drittel von einem Viertelstück ist nur noch ein Zwölftelstückchen: ${}^{1}/_{3} \cdot \frac{1}{4} = {}^{1}/_{12}$

Dabei sehen wir, wie beim Malnehmen mit einem Stammbruch das „behandelte Stück" aufgeteilt wird. Der neue Nenner des uns verbleibenden Stückchens ist so groß wie das Produkt der beiden Nenner, denn: Wenn wir ein Ganzes in 4 Viertelstücken vorliegen haben und diese nun alle in 3 Stückchen zerschneiden, so haben wir das Ganze in insgesamt 3 × 4 = 12 Stückchen geteilt; deren Namen deswegen „Zwölftel" heißen muss.

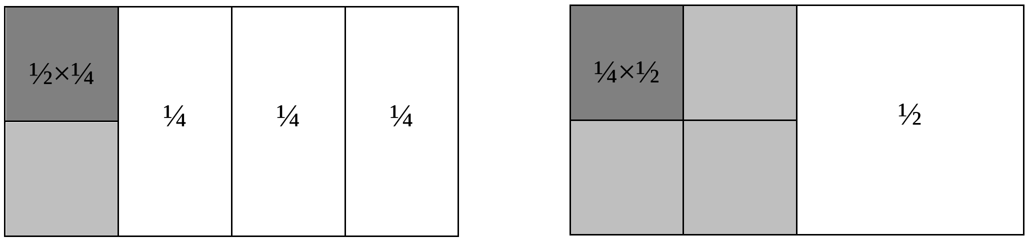
Wir beobachten auch die Wirkung von ausgetauschten Faktoren und entdecken durch die Gleichheit des Produkts das Kommutativgesetz:

---

[48] Siehe Abschnitte „Vorstufen der Multiplikation" und „Multiplikation mit einem Bruch"

Abb. 24: Ein Viertel von ½ ist so groß wie ein Halbes von ¼

a) $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = {}^{1}/_{8}$ b) $\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = {}^{1}/_{8}$



Alleine durch das mehrfache Rechnen werden die meisten Kinder bemerken, dass die Nenner sich gegenseitig durch Malnehmen „verstärken“. Im Vordergrund bleibt daher immer noch die inhaltliche Aussage: Beim Malnehmen mit einem Stammbruch nimmt dieser nur „seinen Anteil“ am Multiplikanden; der Nenner des malnehmenden Stammbruchs sagt, wie stark er die folgende Größe teilen will. Die kleineren Teile erkennen wir am größeren Nenner (dieser teilt feiner ein). Wenn wir also den Nenner beispielsweise verdreifachen, nehmen wir den dritten Teil:

Beim Aufteilen nehmen wir den Nenner mal.

Das Malnehmen mit einem Stammbruch ist daher immer ein Teilen. Der Auftrag: „Dividiere 12 durch 3“ ist also gleich bedeutend mit: „Nimm 1/3 mal (oder: „von“) 12" oder: „1/3 multipliziert mit 12“.

Teile von Brüchen (Stammbruch mal Bruch)

Wenn wir statt einem einzelnen Bruchstück deren mehrere haben, wenden wir unser Verfahren entsprechend mehrfach an. Um etwa 3 Fünftel zu halbieren, nehmen wir uns zunächst nur eines vor und halbieren es:

$\frac{1}{2} \cdot {}^{1}/_{5} = {}^{1}/_{10}$

Dasselbe mit machen wir einem zweiten Fünftel, so dass wir nochmals ein Zehntel dazu erhalten. Wir machen dies ein drittes Mal und haben dann drei Fünftel zu drei Zehnteln halbiert:

$\frac{1}{2} \cdot {}^{3}/_{5} = {}^{3}/_{10}$

Die Anzahl (der Zähler des Ergebnisses) blieb erhalten, der neue Nenner entstand durch Malnehmen der beiden beteiligten Einzelnenner, was immer noch an die Aufteilung zu kleineren Stückchen erinnert. In der Darstellung des Rechenganges weisen wir auf das Produkt im neuen Nenner als Zwischenschritt hin:

$\frac{1}{2} \cdot {}^{3}/_{5} = {}^{3}/_{2 \cdot 5} = {}^{3}/_{10}$

Mit einigen weiteren Aufgaben befestigt sich das Verfahren:

$\frac{1}{2} \cdot {}^{3}/_{5} = {}^{3}/_{2 \cdot 5} = {}^{3}/_{10}$

$\frac{1}{2} \cdot {}^{3}/_{8} = {}^{3}/_{2 \cdot 8} = {}^{3}/_{16}$ $\quad {}^{1}/_{3} \cdot {}^{4}/_{5} = {}^{4}/_{3 \cdot 5} = {}^{4}/_{15}$ $\quad {}^{1}/_{4} \cdot {}^{3}/_{5} = {}^{3}/_{4 \cdot 5} = {}^{3}/_{20}$

Mündlich halten wir die Erinnerung daran wach, dass damit immer auch eine echte Division möglich ist, also beim letzten Beispiel die Frage: „Wie kann man 3/5 durch 4 teilen (oder: an vier verteilen)?“

Multiplikation von Brüchen

Mehrere Teile eines Bruches: Bruch mal Bruch

Wir besinnen uns auf die Aufgaben, bei denen wir mehrere Anteile von (teilbaren) Ganzen genommen haben, z.B. $^2/_3 \cdot 12$. Dabei hatten wir zwei Rechenwege gefunden:

a) erst den Teil: $^1/_3$ von 12 ist 4; dann mal zwei: $^2/_3$ von 12 sind 8

b) erst mal zwei: $2 \cdot 12 = 24$; dann den dritten Teil: $^1/_3$ von 24 sind 8

Inzwischen können wir diesen ganzzahligen Rechengang auch auf Brüche übertragen. Die beiden Lösungswege heißen bei der Aufgabe $^2/_3$ x $^4/_5$:

a) Erst den Teil:	$^1/_3$ von $^4/_5$ sind $^4/_{15}$;	(Nenner malnehmen)
dann mal 2:	$^2/_3$ von $^4/_{15}$ sind $^8/_{15}$	(Zähler malnehmen)
b) Erst mal zwei:	$2 \cdot {}^4/_5$ sind $^8/_5$	(Zähler malnehmen)
dann dritter Teil:	$^1/_3$ von $^8/_5$ sind $^8/_{15}$	(Nenner malnehmen)

Multiplikation zweier Brüche

Beide Arbeitswege führten also zum selben Effekt: Es wurden jeweils die beiden Zähler und die beiden Nenner miteinander malgenommen. Von nun an und schreiben dies als Rechenzeile auch so auf:

$$^2/_3 \cdot {}^4/_5 = {}^{2 \cdot 4}/_{3 \cdot 5} = {}^8/_{15}$$

und notieren dazu die

Rechenregel für die Multiplikation von Brüchen:

So nehmen wir Brüche miteinander mal:

Zähler mal Zähler; Nenner mal Nenner.

Sind in der Klasse die lateinischen Termini bereits Gewohnheit, so könnte entsprechend korrekt formuliert werden:

Bei der Multiplikation von Brüchen bilden wir innerhalb der Zähler wie auch der Nenner die jeweiligen Produkte.

Oder:

Brüche werden multipliziert, indem wir in Zähler und Nenner die Produkte bilden.

In dieser Form gilt die Regel auch schon für die nachfolgende Ausweitung auf mehrere Brüche. Dennoch ist zu überlegen, ob diese abstrakte Form ratsam und auch alltagstauglich ist. Für die Schüler sind bildhafte Formulierungen meist viel aussagekräftiger und die Beschreibung ihrer eigenen Tätigkeiten bindet sich stärker an den zu merkenden Rechenweg.

Wege der Hinführung

Selbstverständlich kann die Hinführung zu dieser Produktbildung auch ohne großen Erklärungsaufwand und kleinschrittiger Rechenaufgaben erfolgen. Wenn der Lehrer für sich selbst die Grundlagen und Zusammenhänge dazu klar erkannt hat, kann ein einziges, überzeugend geschildertes Tafelbeispiel ausreichen, dass die Kinder den Rechenweg als plausibel nachvollziehen können.

Die einzige wirkliche Hürde liegt beim Produkt der Nenner. Daher empfiehlt es sich, wie vorgeschlagen im Vorfeld die Multiplikation mit einem Stammbruch als „Teil von" mit Beispielen zu erläutern und übend zu befestigen. Der eingesetzte Aufwand wird auch die noch zu behandelnde Division erheblich erleichtern.

Erweitern kann helfen

Dennoch können sich etliche Schüler noch schwer tun im freien Umgang mit Brüchen. Eine anschauliche Hilfe bietet dann das Erweitern. Der zu behandelnde Bruch wird feiner aufgeschnitten, wodurch er *verteilbar* wird. Der Sachverhalt kann notfalls auch mit Kreissegmenten an der Tafel oder im Heft bildlich dargestellt werden:

> Vier Fünftel eines Kuchens werden an 3 Kinder verteilt. Zwei dieser Kinder legen ihre Anteile zusammen und schauen nach, welcher Teil eines ganzen Kuchens vor ihnen liegt.
>
> 1 Kind bekommt ein Drittel von den 4 Fünftelstücken, also ${}^{1}/_{3} \times {}^{4}/_{5}$
>
> 2 Kinder bekommen 2 Drittel von den 4 Fünftelstücken, also ${}^{2}/_{3} \times {}^{4}/_{5}$
>
> Und so können wir verteilen:
>
> Wir erweitern ${}^{4}/_{5}$ mit 3 auf ${}^{12}/_{15}$ (jedes der 4 Stücke der Sorte „Fünftel“ schneiden wir in 3 kleine Stückchen mit dem Namen „Fünfzehntel“, davon haben wir nun insgesamt 12); von diesen 12 Stückchen bekommt jedes Kind 4; 2 Kinder haben also zusammen 8 dieser Fünfzehntel-Stückchen: ${}^{2}/_{3}$ von ${}^{4}/_{5}$ sind also ${}^{8}/_{15}$ des Ganzen.

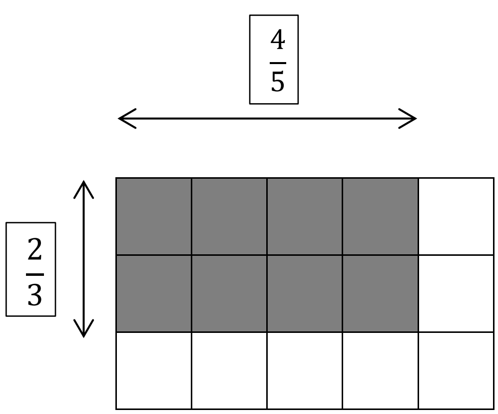
Durch die Wahl von teilerfremden Zahlen blieb im Ergebnis das Produkt der beiden Brüche sichtbar: Der Zähler 8 entstand aus 2 · 4 ; der Nenner 15 entstand aus 3 · 5.

Das Bild der Flächenteilung

Tragen bei der Multiplikation beide Zahlen ein Längenmaß, so bedeutet dies, dass die Fläche eines diesen Maßen entsprechenden Rechtecks beschrieben wird.

Fasst man bei einem solchen Rechteck die Länge als ein Ganzes auf und ebenso die Höhe, so können wir eine Binneneinteilung vornehmen und diese durch Bruchteile beschreiben. Teilen wir nun die Höhe beispielsweise in Drittel ein, so ergeben sich 3 gleiche waagrechte Streifen als Zeilen. Nehmen wir nun bei der Läge 4/4, so gibt es 4 Streifen in Spaltenform. Übers Kreuz gezeichnet erhalten wir damit 12 Teile, welche der Multiplikation von Stammbrüchen entsprechen : ¼ × ¼ = 1/12.

Dies lässt sich auf beliebige (echte) Brüche übertragen. Bei der Aufgabe 2/3 × 4/5 nehmen wir von 3 waagrechten Streifen (zu je 1/3 der Fläche) nur 2 für 2/3 der Gesamtfläche; danach teilen wir das ganze Rechteck (und damit auch die ausgewählten Streifen) in 5 senkrechte Spalten und berücksichtigen davon nur 4 als 4/5 des Rechtecks. Insgesamt haben wir dadurch das Ganze in 3 × 5 = 15 gleiche Teile (zu je 1/15) einteilen, davon sind 2 × 4 = 8 Teile markiert. Sie bedecken 2 · 4 / 3 · 5 = 8 / 15 des Ganzen



$$\boxed{\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{15}}$$

Mit gelegentlichen Rückgriffen dieser Art sollten die meisten Hürden auf dem Weg zum angestrebten freien Rechnen mit beliebigen Brüchen überwindbar sein. Der gewohnheitsmäßige Umgang mit der Bruchmultiplikation kann dann auch als Vereinfachung gesehen werden: Der gesamte bisherige Weg wird unwichtig, weil jede bisher aufgetretene Multiplikation mit der zuletzt genannten Regel bearbeitbar ist.

Aufgaben

1. ½ · 1/5 = 1/10 [die Hälfte eines Fünftelstückes ist nur noch ein Zehntelstückchen]

a) ¼ · 1/6 = ? Ein Viertel von einem Sechstelstück ist nur noch ein ..?..

b) Wie groß ist der dritte Teil von einem Viertel?

c) Nimm die Hälfte von einem Sechstel

d) Verteile einen drittel Kuchen an vier Gäste!

2. 1/5 · 1/6 = 1 / 5·6 = 1/30

a) 1/6 · ½ b) ¼ · 1/8 c) 1/3 · 1/5 d) 1/8 · ½ e) 1/3 · ¼

3. 1/5 · 3/8 = 1·3 / 5·8 (oder 3 / 5·8) = 3/40

a) ½ · 5/8 b) ¼ · ¾ c) 1/3 · ¾ d) 1/5 · 7/6 e) 1/8 · 13/25

4. 5/6 · 3/8 = 5·3 / 6·8 = 15 / 48 ; Ergebnis kürzen: 15/48 = 5/16

a) 3/2 · 5/3 b) 2/5 · 3/10 c) ¾ · ¾ d) ¾ · 2/9

e) 7/8 · 2/5 f) 3/5 · ¾ g) 2/5 · 5/8 h) 3/2 · ¾

5. Veronikas Heimweg von der Schule ist 2 ¼ Kilometer lang. Das erste Drittel davon kann sie mit ihrer Freundin gemeinsam gehen. Welche Strecke ist das und wie viele Kilometer muss sie noch alleine weiter gehen? (Hinweis: 2 ¼ = 9/4)

Weitere Beispiele zeigen auf, wie unsere allgemeine Regel sich auf beliebige, auch noch so besondere Einzelfälle (Multiplikation mit Stammbruch oder mit ganzer Zahl) anwenden lässt:

6. Ganze als “Eintel” umschreiben: $2 \cdot {}^1/_5 = {}^2/_1 \cdot {}^1/_5 = {}^{2\cdot 1}/_{1\cdot 5} = {}^2/_5$

a) 6 · 5/3 b) 5 · 3/10 c) 7/8 · 2 d) 6 · 2/9

e) 3 · ¾ f) 3/5 · 4 g) 2/5 · 6 h) 3/2 · 3

7. Erst Kürzen, dann rechnen (auch bei den Aufgaben 6a-d möglich):

$^8/_3 \cdot {}^9/_2 = {}^{8\cdot 9}/_{3\cdot 2}$ kürzen mit 2 und 3: $= {}^{4\cdot 3}/_{1\cdot 1} = 12$

a) 6 · 5/12 b) 5/6 · 3/10 c) 2/3 · 9/8 d) 6/7 · 28/9

e) 7/8 · 21/4 f) 3/5 · 15/2 g) 12/5 · 25/6 h) 9/32 · 16/3

Multiplikation von mehreren Brüchen

Wenn im Kopfrechnen mehrere Brüche nacheinander als Bearbeiter (Operatoren) eingesetzt wurden, wurde die Gesamtwirkung noch durch Vergleich von Anfangs- und Endzahl bestimmt. Der Übergang zur direkten Multiplikation der Operatoren kann erfolgen, wenn 1 als Ausgangszahl gewählt wird; die Endzahl gibt dann die Gesamtwirkung an. Bei der Arbeitsfolge:

nimm $^1/_5$ – 6mal – nimm $^1/_4$ – 10mal – nimm $^1/_3$ (Kopfrechen-Übungen 7d)

ergibt sich dann:

$1 \cdot {}^1/_5 \cdot 6 \cdot {}^1/_4 \cdot 10 \cdot {}^1/_3$

wobei rasch klar ist, dass die beginnende 1 sich gar nicht beteiligt; wir rechnen schrittweise:

$^1/_5 \cdot 6 = {}^1/_5 \cdot {}^6/_1 = {}^6/_5$; $^6/_5 \cdot {}^1/_4 = {}^{6\cdot 1}/_{5\cdot 4} = {}^{3\cdot 1}/_{5\cdot 2} = {}^3/_{10}$; $^3/_{10} \cdot 10 = 3$; $3 \cdot {}^1/_3 = 1$

Das Gesamtprodukt 1 bedeutet dann, dass jede Zahl, die mit den genannten Operatoren bearbeitet wird, im Endeffekt nur 1-mal genommen wird, also unverändert wieder erscheint.

Ein gutes Beispiel für die Hintereinander-Ausführung von Operatoren ist die mehrfache eine Verkleinerung bei einem Fotokopierer. Die häufigste Verkleinerung beträgt 70% oder als Bruch 7/10. Welche Maße ergeben sich auf der Kopie, wenn das Original (DIN A4) die Länge 30 cm und die Breite 21 cm hat?

$^{7}/_{10}$ x 30 cm = 21 cm; $^{7}/_{10}$ x 21 cm = $^{147}/_{10}$ cm = 14 $^{7}/_{10}$ cm (=14,7 cm)[49]

Wie verändern sich alle Größen, wenn nun eine Kopie von der Kopie gemacht wird?

Die erste Kopie nimmt 7/10 vom Original, die zweite nimmt 7/10 von 7/10,
also: $^{7}/_{10} \cdot {}^{7}/_{10} = {}^{7\cdot 7}/_{10\cdot 10} = {}^{49}/_{100}$ (das ist etwa die Hälfte: ½ = $^{50}/_{100}$)[50]

Wie stark wird insgesamt verkleinert, wenn erst auf 2/3 verkleinert wird und anschließend auf 4/5?

Die erste Kopie nimmt 2/3 vom Original, die zweite nimmt 4/5 von 2/3,
also: $^{4}/_{5} \cdot {}^{2}/_{3} = {}^{4\cdot 2}/_{5\cdot 3} = {}^{8}/_{15}$

Ein ähnlicher Ansatz wurde eingangs in der Vorbemerkung zur Multiplikation geschildert innerhalb der multiplikativen Vergleiche, als diese mehrfach angewandt wurden. Wenn es dort beispielsweise heißt, dass beim Höhenvergleich von Bäumen der mittlere ¾ von der Höhe des großen hat und der kleine nur noch 2/3 des mittleren, so kann der kleine Baum auch direkt mit dem großen verglichen werden, indem die Einzelschritte multipliziert werden:

$¾ \cdot {}^{2}/_{3} = {}^{3\cdot 2}/_{4\cdot 3} = {}^{1\cdot 1}/_{2\cdot 1} = ½$

Damit hat der kleine Baum also die halbe Höhe des großen.

Ist der jeweilige Bruch nicht durch eine Sachaufgabe an eine konkrete Bedeutung – wie hier an das zweier Bäume – gebunden, darf sogar die Reihenfolge im Ablauf getauscht werden, ohne das Endergebnis zu ändern:

$^{2}/_{3} \cdot ¾ = {}^{2\cdot 3}/_{3\cdot 4} = {}^{1\cdot 1}/_{1\cdot 2} = ½$

Wir dürfen sogar alle Zähler und Nenner gleichzeitig mit einem einzigen durchgehenden Bruchstrich zusammenfassen und dann noch die Zahlen innerhalb des Zählers wie auch des Nenners beliebig frei anordnen. Die bisher um der Vollständigkeit willen mehrfach mitgeschriebene 1 (im Zähler kommt sie von den Stammbrüchen, im Nenner von den Einteln) darf weggelassen werden[51], dadurch vereinfacht sich das erste Beispiel erheblich:

$^{1}/_{5} \cdot 6 \cdot {}^{1}/_{4} \cdot 10 \cdot {}^{1}/_{3}$

$= \frac{1\cdot 6\cdot 1\cdot 10\cdot 1}{5\cdot 1\cdot 4\cdot 1\cdot 3} = \frac{6\cdot 10}{5\cdot 4\cdot 3} = \frac{10\ \cdot\ 6}{5\cdot 4\cdot 3}$ = (kürzen durch 5 und durch 3) = $\frac{2\cdot 2}{4} = 1$

Unsere Rechenregel für die Multiplikation von Brüchen können wir daher beibehalten, wenn wir mehrere Faktoren zulassen und dann pauschal alle Zähler miteinander malnehmen, ebenso alle Nenner.

Aufgaben

1. a) ½ × 1/5 b) 1/3 × 2/9 c) 12/3 × 2/7 d) 5/12 × 1/3
2. Kürze vor dem Multiplizieren: a) 7/12 × 6/5 b) 6/25 × 50/30 c) 34/32 × 16/17
3. a) 5/6 × 3/2 × 8/3 b) 7/13 × 1/6 × 9/39 c) 125/128 × 16/25 × 4/5

[49] Dabei wird die Blattfläche halbiert (DIN A4 auf A5).

[50] Nun werden Länge und Breite halbiert; die Fläche wird also geviertelt, und das DIN-A4-Blatt auf Postkartengröße gebracht (A6).

[51] Als Faktor innerhalb eines Produkts verhält sich 1 neutral. Sie muss also nicht extra erwähnt werden, es sei denn, sie ist die letzte verbliebene Zahl des Produkts, etwa nach dem Kürzen.

Division durch Brüche

Erinnerung: Division durch ganze Zahlen

Verteilen

Wenn wir geeignete Zahlen wählen, lassen sich Brüche (mit teilbarem Zähler) wiederum als ganzzahlige Stücke mit der Bezeichnung des Nenners (quasikardinal) behandeln. Dieser Lösungsweg kann mit Aufgaben des Alltags gut illustriert werden und kommt damit den weniger abstraktionsfähigen Schülern sehr entgegen. Die Division ist vorerst noch sichtbar als Tätigkeit, indem wir Auf- oder *Verteilen*. Bei nicht teilbarem Zähler können wir zuvor passend erweitern.

Als Vorbereitung auf die Division durch Brüche ist dieser Zwischenschritt möglicherweise eine Hilfe. Eine noch größere Hilfe ist allerdings die Gewöhnung daran, das Verteilen in seiner klassischen Schreibweise zu umgehen durch das soeben aus der „Teil-von-Beziehung“ entwickelte Malnehmen mit einem (Stamm-)Bruch. Den Weg dazu können wir nochmals anschaulich durchlaufen:

Die Torte war in 16 Teile geschnitten, wovon jetzt noch 6 (Sechzehntel-) Stücke übrig sind. Diese sollen an 3 Gäste verteilt werden.

6 Sechzehntel-Stücke verteilt an 3 ergibt für jeden 2 Sechzehntel-Stücke: $^6/_{16} : 3 = {}^2/_{16}$

Was machen wir aber, wenn für unsere 3 Gäste nur noch 5 Sechzehntel-Stücke geblieben sind? Weil sich die Anzahl der Stücke nicht gerecht verteilen lässt, müssten wir die Stücke vorher geeignet einteilen. Innerhalb des Bruchrechnens nannten wir diesen Vorgang „erweitern“.

Wir können alle Stücke dritteln und erhalten dadurch insgesamt 15 Stückchen, allerdings nur noch theoretisch, weil sie viel zu schmal würden: Es sind dann nämlich nur noch Achtundvierzigstel vom Ganzen. Von diesen 15 erhält jeder 5 Stückchen. Der bisherige Rechenweg des Verteilens wird aber ermöglicht; wir erweitern zuvor mit der Zahl, durch die danach geteilt werden soll:

aus $^5/_{16}$ machen wir $^{5 \cdot 3}/_{16 \cdot 3} = {}^{15}/_{48}$

diese können wir verteilen $^{15}/_{48} : 3 = {}^5/_{48}$

Wenn wir die Anfangszahl $^5/_{16}$ mit dem Ergebnis $^5/_{48}$ vergleichen, das der Nenner 16-tel mit dem Divisor 3 multipliziert wurde mal und es gilt noch unsere alte Regel: *Beim Aufteilen nehmen wir den Nenner mal.*

Statt Division: Multiplikation mit Stammbruch

Daher werden wir künftig die Division stets durch die bereits bekannte Multiplikation mit Bruchteilen ersetzen. Da jedem Gast $^1/_3$ des Restes zusteht, können wir die Frage

$^5/_{16} : 3$?

in obiger Aufgabe entsprechend umformulieren in

wie groß ist $^1/_3$ von $^5/_{16}$?

und wie bisher errechnen als

$^1/_3 \cdot {}^5/_{16} = {}^5/_{3 \cdot 16} = {}^5/_{48}$

Aufgaben

1. a) 1/3 : 2 b) 1/5 : 2 c) 1/3 : 3 d) ½ : 4 e) 1/8 : 2 f) 1/6 : 4
2. a) 2/3 : 3 b) 3/5 : 2 c) ¾ : 2 d) 3/2 : 4 e) 5/8 : 2 f) 5/6 : 4
3. Das Ergebnis kann anschließend gekürzt werden:

a) 3/5 : 6 b) 2/3 : 4 c) ¾ : 6 d) 5/8 : 10 e) 6/9 : 4 f) 10/25 : 2

4. In einem Kochrezept für 4 Portionen sind 1 ½ Pfund Nudeln und $^{6}/_{10}$ Liter Tomatensoße angegeben. Ines möchte das Rezept zunächst für eine Portion ausprobieren. Wieviel Nudeln und Soße muss sie nehmen? (Tipp: 1½ = $^{3}/_{2}$)

Division durch Brüche

Für die meisten Menschen blieb als Erinnerung an das Bruchrechnen die Empfindung, dass die Division durch Brüche unverständlich ist. Das Unbehagen darüber könnte auch manchem Klassenlehrer den Elan bremsen. Hilfreich dagegen kann nur die eigene Orientierung sein. Die Schüler wollen spüren, dass der Lehrer seinen Weg sicher und zielgerichtet geht, dass er selbst die Sache verstanden hat und die Übersicht behält. Ist dann erst einmal die abschließende Rechenregel erreicht, können die Kinder diese als interessantes Hilfsmittel beim fröhlichen Zahlenturnen unbeschwert einsetzen. Und selbst wenn dann der Entwicklungsweg hin zu dieser sehr einfachen Regel verblasst ist, verbleibt die Empfindung, dass der Weg dazu jederzeit wieder gefunden werden könnte. Diese gefühlsmäßige Sicherheit kann in den Schülern weiter tragen, als gut gemeinte wiederholte Erklärungen.

Die Bruchdivision spielt sich weder in weltfremden Mathematikregeln ab, noch ist sie schwierig zu verstehen; lediglich die alltäglichen Rechengewohnheiten beeinträchtigen den freien Blick darauf. Schon allein der Wechsel der Perspektive wird den Weg eröffnen. Für die Arbeit in der Klasse werden dazu verschiedene Vorschläge angeboten, mit denen sich die Division als alltäglich vertraute Tätigkeit entpuppt.

Vergleichen statt Aufteilen

Innerhalb von Sachaufgaben haben wir bei der Division zwei unterschiedliche Fragen gestellt, um den Zusammenhang richtig zu schildern:

Wie groß ist das Teilstück (*aufteilen*)?

oder:

Wievielmal kann das Teilstück aus dem Ganzen entnommen werden (*Enthaltensein*)?

Wurden im Mathematik-Unterricht regelmäßig diese beiden Aspekte der Division beachtet, so lässt sich nun die letzte große Hürde beim Bruchrechnen überwinden. Für die 5. Klasse wurde bereits einleitend der multiplikative Vergleich als neuer Blickwinkel geschildert. Zwar wurden dort Dinge der äußeren Anschauung – in Form von bemaßten Zahlen – verglichen, doch ist dies auch bei reinen Zahlen möglich:

8 ist verglichen mit 2 *viermal größer*

Enthaltensein

Überträgt man diese vergleichende Betrachtungsweise auf die Division, so erkennen wir die bekannte Formulierung wieder:

2 ist in 8 viermal enthalten

Diesen Sprachgebrauch kennen die Schüler aus dem Sachrechnen. Obwohl die Schreibweise

8 : 2 = 4

sich nicht vom Verteilen (als „8 geteilt durch 2“) unterscheidet, ist ihnen die andere Deutung als *Enthaltensein* geläufig. Beim Rechnen mit reinen Zahlen umgehen sie damit sogar das Teilen „8 geteilt durch 2“ durch die Frage „wie oft ist 2 in 8 enthalten“ oder „2 mal wie viel gibt 8?“ Damit ergibt sich wiederum der Zusammenhang mit der Multiplikation, der sich am besten mit einer entsprechenden Sachaufgabe, beispielsweise durch

4 x 2m = 8m

illustrieren lässt. Diese kann durch zwei Fragestellungen umgekehrt werden:

a) Teilen (verteilen, aufteilen): 8m geteilt durch 4 sind *2m*

b) Enthaltensein (messen, ausschöpfen): in 8m sind 2m *viermal* enthalten

Die Kinder erkennen zunächst nur bei den Geteiltpunkten – bei geeigneter Aufgabenstellung – beide Deutungen wieder und unterscheiden dann je nach Sachlage zwischen „Teilen“ und „Enthaltensein“. Die Bruchschreibweise hingegen beziehen sie meistens noch auf das beschriebene „Aufteilen“, also auf den „Bruchteil“ in einem auf Form oder Größe gebundenem Bild. Dies entspricht zwar nicht mehr unserem eigentlichen Anliegen, ermöglicht aber zunächst den Rückgriff auf einen quasikardinalen Ansatz, bei dem die Bruchstücke wie (ganze) Gegenstände gezählt werden.

Der wirklich neue Schritt wird jedoch erst möglich, wenn wir die Bruchteile zueinander in Beziehung setzen und miteinander vergleichen. Dazu benötigen wir das Enthaltensein oder Messen als gleichberechtigten Aspekt der Division. Die Kinder sind zwar mit beiden Divisionsfragen vertraut, dennoch sind sie befremdet, wenn der Divisor ein Bruch ist. Man könnte die zunächst irritierende Aufgabe:

3 : ½ = ? mit der Sprechweise „3 geteilt durch ½“

anschreiben und die vielleicht überraschten Kinder rätseln lassen. Dabei ist die Antwort: „Das geht doch gar nicht!“ eine gesunde Reaktion und ernst zu nehmen. Sie bezieht sich auf die gewohnte Deutung „drei verteilt an ½“, welche tatsächlich „nicht geht“. Man kann 3 Euro zwar an 2 Kinder verteilen, aber nicht an ½ Kinder.

Statt Verteilen: Vergleichen!

Erst wenn wir nach dem Enthaltensein fragen: „wie oft kann von 3 Euro ein halber Euro ausgeteilt werden?“ oder einen multiplikativen Vergleich anstellen: „3€ sind wievielmal mehr als ½ €?“ wird ein lebensrealer Zusammenhang hergestellt. Doch dann ist das Eis schon gebrochen und es könnten mündlich bereits einfache Divisionen gemacht werden, etwa der Art:

¼ passt in 1 Ganzes wie oft hinein? 1/8 mal wieviel gibt ½?

Wievielmal musst du 1/3 nehmen, bis du 2 Ganze hast?

Die Division durch Brüche entspricht daher sachgemäß einem Vergleichen oder Messen mit Bruchteilen.

Diesen Vorgang können die Kinder auch experimentell durchführen. Die angeführten Beispiele zeigen bereits zwei Grundrichtungen an, welche einen anschaulichen und lebensnahen Umgang mit der Fragestellung ermöglichen: Ausschöpfen von Rauminhalten und Längenvergleiche. Beide Verfahren werden im Folgenden beispielhaft dargestellt - als Anregung für eigene Wege des Lehrers mit seiner Klasse.

Dabei können die Größenverhältnisse bei Rauminhalten bei bloßem Augenschein gewaltig täuschen[52], doch entspricht das Ausschöpfen oder Umgießen wörtlich dem Begriff „Enthaltensein“. Der Längenvergleich zeigt dagegen alle Größen unmittelbar maßstäblich; er kann deswegen gegenüber der Volumenmessung bevorzugt werden oder diese sinnvoll ergänzen.

Unabhängig von diesem stark handlungsorientierten Zugang wird noch eine weitere Hinführung angeboten. Sie erfolgt rein rechnerisch, aber auf dennoch anschauliche Weise. Egal welches Vorgehen gewählt wird: Ohne allzu großem Zeitaufwand soll als Ziel erreicht werden,

[52] Wenn ein Gefäß bei gleicher Form die Abmessungen um nur ein Viertel vergrößert werden, so wird der Inhalt beinahe verdoppelt! Bei formgleichen Körpern wächst das Volumen mit der dritten Potenz seiner linearen Abmessung: Verdoppelt man bei einem Würfel die Kantenlänge, so wird das Volumen auf das achtfache vergrößert.

dass die Schüler sich mit zwei – zunächst überraschend klingenden – Sachverhalten vertraut machen können. Beim Dividieren durch einen Bruch

- kann das Ergebnis größer sein als die zu dividierende Zahl (nicht weil der Teil größer als das zu Verteilende wäre, sondern weil ein kleinerer Bruchteil öfter enthalten ist)
- wirkt dessen Zähler als Divisor und sein Nenner als Multiplikator, der Bruch wird wie auf den „Kopf gestellt".

Weil das Ergebnis der Division bei unserer Art des Vorgehens keine dinghafte Größe darstellt, sondern unsere eigene Tätigkeit des Vergleichens oder Messens beschreibt, können wir dies anfangs mit einem entsprechenden Zusatz notieren:

Statt 4 : 1/3 = 12 schreiben wir 4 : 1/3 = 12-mal

um die Lesart: „in 4 ist 1/3 zwölfmal enthalten" zu erinnern.

Praktisches Vergleichen: Messen als Bild der Division

Schöpfmaße

Wir stellen verschieden große Gefäße bereit. Damit deren Inhalte gut vergleichbar sind, markieren wir den Füllstand passend[53]. Unser Ausgangsmaß ist ein Liter (Messbecher). Die weiteren Gefäße könnten von Mokkatasse über Teetasse, Tasse, Becher, Glas, Krug bis hin zum kleinen Eimer die Maße $^1/_{12}$ Liter, $^1/_8$, $^1/_6$, ¼ , $^1/_3$, ½ , $^2/_3$, $^3/_4$, 1½ = $^3/_2$, 2 und 6 Liter – als Maximal-Auswahl – umfassen.

Zunächst messen wir die Größe der kleinen Gefäße, deren Inhalt als Stammbruch eines Liters beschreibbar ist: Mit Liter-Messbecher können wir die Mokkatasse 12-mal füllen, also hat die Mokkatasse $^1/_{12}$ Liter Inhalt. Des weiteren können wir die Vielfachen des Liters feststellen: Mit dem Messbecher können wir 6-mal den kleinen Eimer befüllen, dieser fasst also 6 Liter Inhalt.

Die noch fehlenden Maße stellen wir durch Vergleich mit den nun bekannten kleinen Gefäßen fest. Dadurch eröffnen sich viele Möglichkeiten. Der $^3/_4$-Liter lässt sich aus ¾ = $^2/_3$ + $^1/_{12}$ oder aus ¾ = ½ + ¼ kombinieren; wir erinnern uns an das Addieren von ungleichnamigen Brüchen.

Noch besser geht es, wenn wir ein „passendes" Maß für den ¾-Liter finden, zum Beispiel 9 · $^1/_{12}$ oder 6 · $^1/_8$ oder 3 · ¼. So wiederholen wir das Malnehmen von Stammbrüchen (mit anschließendem Kürzen).

Die Division durch Brüche kann nun bildhaft beschrieben und geübt werden; anfangs können wir auch die Division experimentell begleiten. Die Stammbrüche lassen gut erkennen, welchen Einfluss ihr Nenner beim Dividieren hat.

Im großen Saftkrug (2 l) sind enthalten:

2-mal Meßbecher (1 l)	2 : 1 = 2-mal
4-mal Trinkkrug (½ l)	2 : ½ = 4-mal
6-mal Glas ($^1/_3$ l)	2 : $^1/_3$ = 6-mal
8-mal Trinkbecher (¼ l)	2 : ¼ = 8-mal
12-mal Tasse ($^1/_6$ l)	2 : $^1/_6$ = 12-mal

[53] Als Füllmaterial erscheint (gefärbtes) Wasser als naheliegend und sachgemäß bei geeigneter Unterlage (Tisch mit Wachstuch oder Auffangschale, großes Waschbecken). Doch können den Kindern gute und überzeugende Gründe dafür genannt werden, warum „Hohlmaße" so außerordentlich praktisch sind für alle schüttbaren Materialien wie Zucker, Mehl, Grieß und ähnliche Lebensmittel. Gut geeignet für den Versuch in der Klasse ist daher auch Getreide, das früher nicht nach Gewicht, sondern nach dem Inhalt eines „Scheffels" gemessen wurde. Für einen warmen Sommermorgen ist natürlich auch Kirsch- oder Traubensaft interessant, der nachher zur Pause den Kindern zum Verinnerlichen angeboten wird.

24-mal Mokkatasse ($^1/_{12}$ l) 2 : $^1/_{12}$ = 24-mal

Andere Messreihen können folgen, um das häufigere Enthaltensein von kleineren Maßen (und größerem Nenner) zu zeigen. Dem entsprechend lässt sich danach die umgekehrte Wirkung von größer werdenden Maßen (bei wachsendem Zähler) beobachten: Je größer das Maß, umso weniger oft passt es hinein. Am deutlichsten wird der Einfluss des Zählers erkennbar, wenn der Nenner gleich bleibt.

Im Eimer (6 l) sind enthalten:

48-mal Teetasse ($^1/_8$ l)	6 : $^1/_8$ = 48-mal (der Nenner nimmt mal)
24-mal Becher (¼ l = $^2/_8$ l)	6 : $^2/_8$ = 24-mal
12-mal Trinkkrug (½ l = $^4/_8$ l)	6 : $^4/_8$ = 12-mal
8-mal Milchkrug (¾ l = $^6/_8$ l)	6 : $^6/_8$ = 8-mal
6-mal Messbecher (1 l = $^8/_8$ l)	6 : $^8/_8$ = 6-mal

Interessant wird unsere Versuchsreihe, wenn beim großen Gefäß das Maß ebenfalls einen Bruch darstellt. Die Mokkatasse passt dann 3-mal in den Becher, 6-mal in den Trinkkrug und 9-mal in den Milchkrug:

¼ : $^1/_{12}$ = 3-mal ½ : $^1/_{12}$ = 6-mal ¾ : $^1/_{12}$ = 9-mal

Im Heft lassen wir einige solcher Beispiele beschreiben und schließen mit einem zusammenfassenden Text (siehe nach dem nächsten Abschnitt) ab.

Knotenschnüre

Aus verschieden farbigen Schnüren bereiten wir Längenmaße vor, indem wir darin Abstände mit Knoten markieren. In die rote Schnur (Grundmaß) knüpfen wir Knoten, deren Abstände mit dem Meterstab geeicht sind. Fünf Knoten (mit vier Metern Länge) sind dafür ausreichend[54]. Schon jetzt können wir damit einfache Divisionen (echte Teilungen) sichtbar machen, wenn wir die Schnur zusammen legen und spannen:

4m : 2 = 2m ; 4m : 4 = 1m ; 4m : 8 = ½ m ; 4m : 16 = ¼ m.

Mit diesen Maßen können wir die Knotenabstände von anderen Schnüren[55] festlegen; wir knüpfen die gelbe Schnur mit acht halben Metern und die grüne Schnur mit 16 x ¼ Metern. Damit lassen sich dann auch verschiedene Multiplikationen zeigen:

12 Abschnitte der grünen Schnur sind gleich lang wie 6 Abschnitte der gelben Schnur oder wie 3 der roten.

Der zugehörige Vergleich

12 · ¼ m = 3 m Gesamtlänge
6 · ½ m = 3m
3 · 1 m = 3m

zeigt bereits die Gegenläufigkeit von Multiplikator und Multiplikand, wenn das Produkt gleich bleiben soll: „Halbiert man das Maß, so benötigt man dafür doppelt so viel davon (und

[54] Wenn die größere Länge nicht hinderlich erscheint, bieten 7 Knoten mit 6 Metern wegen des größeren Teilerreichtums wesentlich mehr und günstigere Möglichkeiten (siehe vorangehender Abschnitt „Messen mit Schöpfmaßen“). Es kann natürlich auch ein kürzeres Grundmaß gewählt werden ohne die (praktische) Benennung „Meter“.

[55] Durch geschicktes Zusammenlegen des Grundmaßes lässt sich (fast) jedes gewünschte Maß erreichen, neben den eher ungewöhnlichen Stammbrüchen wie 1/3m, 1/5m, 1/6m natürlich auch beliebige Vielfache: Dem Experimentieren sind also – außer der möglichen Zeit – fast keine Grenzen gesetzt!

umgekehrt), um dieselbe Gesamtlänge zu erhalten.“ Damit ist die Division durch Brüche als Messvorgang mit Bruchteilen gut vorbereitet.

Die rote Schnur erreicht mit ihren 4 Abschnitten insgesamt vier Meter Länge, das Maß „1 Meter“ ist in der Gesamtlänge viermal enthalten; mit der gelben Schnur brauchen wir für dieselbe Länge schon 8 Abschnitte, das Maß „½ Meter“ ist achtmal in 4 Metern Länge enthalten; beim Viertelmeter benötigen wir entsprechend 16 Abschnitte:

4m : 1m = 4-mal

4m : ½ m = 8 (½m ist achtmal in 4m enthalten)

4m : ¼ m = 16 (¼m ist sechszehnmal in 4m enthalten)

Ein halber Meter passt doppelt so oft in die Gesamtlänge wie der ganze Meter; ein Viertel ist viermal so oft enthalten wie ein Ganzes.

Von der grünen Schnur können wir auch mehrere Abschnitte gemeinsam als Maß benutzen und auch zunächst ungewöhnlich klingende Beziehungen wie „Dreiviertel Meter passen in 3 Meter viermal hinein“ betrachten und zu einer Rechenreihe ergänzen:

3m : ¼ m = 12-mal

3m : 2/4 m = 6-mal

3m : ¾ m = 4-mal

3m : 4/4 m = 3-mal

3m : 6/4 m = 2-mal

Das Maß von zwei Vierteln passt nur noch halb so oft hinein wie das Maß von einem Viertel.

Wenn das Maß zu groß ist, passt es nur teilweise hinein:

1m : 2m = ½ -mal oder: 2m passen nur zur Hälfte in 1m hinein

3m : 4m = ¾ -mal oder: 4m werden nur zu ¾ gebraucht, um 3m zu füllen

Ähnlich wie bei den Schöpfmaßen wird auch hier unsere Versuchsreihe interessant, wenn das große Maß ebenfalls ein Bruch ist:

¾ : ¼ = 3-mal   ½ : ¼ = 2-mal $^3/_2$: ¼ = 6-mal $^3/_2$: ¾ = 2-mal

Zusammenfassung

Für das Heft wählt der Lehrer einige der Experimente und daran anschließende Rechenreihen so aus, dass der Boden für gefühlsmäßige Einsichten gestärkt wird. Durch überschaubare Zahlenbeziehungen werden gesunde Fundamente gelegt für die Erkenntnis:

Wenn wir durch einen doppelt so großen Bruch (dessen Zähler also verdoppelt wurde) dividieren, so passt dieser halb so oft hinein. *Der Zähler des dividierenden Bruches teilt.*

Wenn wir durch einen halb so großen Bruch (dessen Nenner also verdoppelt wurde) teilen, so passt dieser doppelt so oft hinein: *Der Nenner des dividierenden Bruches nimmt mal.*

Nach nur wenigen weiteren Beispielen wird klar, dass beim dividierenden Bruch alles verkehrt herum ist im Vergleich zu einem multiplizierenden Bruch. Wir führen den Begriff *Kehrwert* ein und schreiben dieselben Beispiele dann nochmals mit der neuen Möglichkeit:

3m : ¼ m = 12-mal   wir rechnen $3 : ¼ = 3 \cdot {}^4/_1 = 3 \cdot 4 = 12$

3m : 2/4 m = 6-mal   wir rechnen $3 : {}^2/_4 = 3 \cdot {}^4/_2 = {}^{3\cdot4}/_2 = 6$

¾ : ¼ = 3-mal   wir rechnen $¾ : ¼ = ¾ \cdot {}^4/_1 = {}^{3\cdot4}/_{4\cdot1} = 3$

$^3/_2$: ¾ = 2-mal   wir rechnen $^3/_2 : ¾ = {}^3/_2 \cdot {}^4/_3 = {}^{3\cdot4}/_{2\cdot3} = 2$

Mit den Beispielen aus den Schöpfmaßen ergibt sich:

¼ : $^1/_{12}$ = 3-mal   wir rechnen $¼ : {}^1/_{12} = ¼ \cdot {}^{12}/_1 = {}^{12}/_4 = 3$

½ : $^{1}/_{12}$ = 6-mal		wir rechnen	½ : $^{1}/_{12}$ = ½ · $^{12}/_{1}$ = $^{12}/_{2}$ = 6

¾ : $^{1}/_{12}$ = 9-mal		wir rechnen	¾ : $^{1}/_{12}$ = ¾ · $^{12}/_{1}$ = $^{3\cdot 12}/_{4\cdot 1}$ = 9

Ein rechnerischer Zugang

Bereits einleitend stellten wir fest, die Division durch Bruchteile nur mit Tätigkeiten wie Enthaltensein oder Messen begreifbar ist. Die oben vorgestellten Experimente verbildlichen dies sinnfällig. Hat die Klasse durch ausreichend Übung bereits eine gewisse Sicherheit erreicht, so können bisherige Rechengewohnheiten ebenfalls einen gangbaren Weg zur Division aufzeigen. Doch meist wird der zeitliche Rahmen längst erschöpft und auch der nötige freie Umgang mit Brüchen kaum erreicht sein.

Dieser Weg wird also normalerweise der 6. Klasse vorbehalten bleiben. Dennoch sind in der 5. Klasse einfache Divisionsaufgaben möglich, wenn gleichartige Brüche benutzt werden. Diese können über den multiplikativen Vergleich gegeneinander abgewogen werden. Die hier zu schwierige Weiterführung zu beliebigen Bruchdivisionen ist daher im Abschnitt XXX / Anhang? / Weg zur Kl.6 dargestellt. Noch ohne algebraische Formeln kann dort mit reinen Zahlen eine schlüssige Begründung für merkwürdige Regel gefunden werden, nach der eine Division durch einen Bruch ersetzt werden kann von einer Multiplikation des Kehrwertes.

Enthaltensein von Stammbrüchen

Wie oft ein Bruchteil im Ganzen enthalten ist, begründete anfangs der 4. Klasse die Kennzeichnung des (Stamm-)bruches durch den Nenner. Daher ist den Schülern aus innerer Anschauung vertraut, dass ein Viertel im Ganzen 4-mal enthalten ist. Dieser Sachverhalt kann nochmals anhand verschiedenster Stammbrüche kurz erinnert werden:

1 : ¼ = 4-mal ;		1 : $^{1}/_{8}$ = 8-mal ;		1 : $^{1}/_{16}$ = 16-mal

Liegen uns mehrere Ganze vor, so passen die Brüche entsprechend mehrfach hinein:

2 : ¼ = 2·4-mal oder 8-mal ;		2 : $^{1}/_{8}$ = 16-mal ;		2 : $^{1}/_{16}$ = 32-mal

5 : ¼ = 5·4-mal oder 20-mal ;		5 : $^{1}/_{8}$ = 40-mal ;		5 : $^{1}/_{16}$ = 80-mal

Aber in allen Beispielen fällt die Rolle des Nenners auf:

Je kleiner das Maß (mit größerem Nenner), desto öfter passt es hinein – der Nenner des dividierenden Bruches nimmt mal.

Diese Einsicht kann sogar mit einem Zwischenschritt belegt werden, wenn wir den Dividenden (die zu teilende Zahl) vorher in eine vergleichbare Form gebracht haben, also in einen Bruch mit gleichem Nenner wie der Divisor (Teiler):

2 : ¼ = ?

Um 2 Ganze (=$^{2}/_{1}$) in Viertel zu verwandeln, erweitern wir mit 4 und erhalten $^{2\cdot 4}/_{1\cdot 4}$ = $^{8}/_{4}$;

Die ehemaligen 2 Ganzen sind nun acht Viertel, die wir direkt mit dem einen Viertel vergleichen können:		¼ ist achtmal in $^{8}/_{4}$ enthalten

oder mit der Abfolge wie in der Rechenzeile:		in $^{8}/_{4}$ ist ¼ achtmal enthalten

Besteht der Divisor aus einem kleinen Bruch, so zeigt er dies mit seinem großen Nenner an. Dieser führt zu einer großen Erweiterungszahl im Dividenden und als Folge zu einem entsprechend vergrößerten Ergebnis *– der Nenner des dividierenden Bruches nimmt mal.*

Enthaltensein bei gleichnamigen Brüchen

Offenkundig ist das Enthaltensein bei Brüchen einfach festzustellen, wenn die beiden beteiligten Brüche gleiche Nenner haben. Brüche, die gleichnamig sind und darüber hinaus sich auch noch ganzzahlig dividieren lassen, erleichtern die Division erheblich. Die Frage

6/5 : 2/5 = ?

können wir bildhaft umformulieren zu:

Wie oft sind 2 Fünftelstücke in 6 Fünftelstücken enthalten? Oder:

Wie oft kann man 2 Fünftelstücke von 6 Fünftelstücken wegnehmen?

Weil das Maß „Fünftelstücke“ gemeinsam ist, genügt die Antwort:

So oft, wie 2 in 6 enthalten ist, also 3-mal

Bei gleichnamigen Brüchen können wir uns also auf einen Vergleich der beiden Zähler beschränken, der (gemeinsame) Nenner ist nur so etwas wie ein Familienname; wir rechnen wie mit ganzen Zahlen, der Ansatz erfolgt also wie früher quasikardinal. Einfache Beziehungen von Brüchen untereinander können angeschlossen werden, um das Vorgehen zu befestigen mit einigen – am besten an der Tafel angeschriebenen

Kopfrechenaufgaben

1. a) ½ : ¼ ; $^3/_2$: ¼ ; ½ : $^1/_8$; ¾ : $^1/_8$; $^3/_2$: ¾ ;
2. a) 2/3 : 1/3 b) 9/4 : ¾ c) 4/7 : 2/7 d) 8/9 : 2/9 e) 15/8 : 3/8
3. Wie oft passt ¼ in a) 2 b) 3 c) ½ d) 1 ½ (=3/2) e) 2 ½
4. Wie oft passt 1/8 in a) 2 b) 3 c) ½ d) 1 ½ e) ¼ f) 2 ½
5. Wie oft passt 1/6 in a) 1/3 b) 2/3 c) 1 1/3 (=4/3) d) 2 e) 1 ½
6. Erst geeignet erweitern: a) 6/5 : 3/10 b) 4/3 : 1/6 c) 4/3 : 2/15 d) 15/2 : 5/6

Textaufgaben

7. Im Badezimmer ist der Rand zwischen Boden und Wand mit einem Sockel aus schmalen Fliesen verkleidet. Diese sind jeweils 1/5 Meter lang. Wie viele davon befinden sich an der 3 Meter langen Wand? Die andere Wand ist nur 2 Meter lang. Wie viele Fliesen sind dort?
8. In einen Joghurt-Becher passen etwa 1/6 Liter hinein. Wie viele von ihnen kann man füllen mit a) 1 Liter b) 2 Litern c) 3 Litern d) ½ Liter ?
9. Der Geräteschuppen im Garten wird außen mit aufrecht stehenden Brettern verkleidet, von denen jedes 1/8 Meter Breite abdeckt. Wie viele Bretter braucht man

a) für die 3 Meter breite Rückwand

b) für eine 2 Meter breite Seitenwand

c) für die Tür (¾ Meter)?

d) Wie viele Bretter braucht man insgesamt für alle Außenflächen?

Dezimalbrüche

Kenntnisstand der Klasse

Die Addition und Subtraktion von Dezimalbrüchen war bereits Übungsstoff in der 4. Klasse. Weil sich das schriftliche Rechenschema nicht von dem für ganze Zahlen unterschieden hatte, genügte die Weiterführung und Vertiefung des Übungsstoffes aus Klasse 3. Neu war lediglich die strenge Ausrichtung der Spalten durch das Komma, was nach der Gewöhnung daran sogar eine erleichternde Schreibhilfe erbrachte. Daher muss für diese Rechenstufe keine eigene Übungszeit mehr eingeräumt werden.

Dagegen werden Multiplikation und Division noch nicht allen Schülern frei zur Verfügung stehen, vor allem bei mehrstelligen Bearbeitern. Diese Rechenstufe hat in der 5. Klasse etlichen Übungsbedarf, vor allem die Division. Da die Kommasetzung keine merkliche Erschwnis verursacht, können die grundlegenden Fertigkeiten auch an Aufgaben mit Dezimalzahlen gefestigt werden.

Einigermaßen rasch sollten die nötigen Rechenschritte mit reinen Zahlen erübt sein, damit genügend Zeit bleibt, um diese auf Sachaufgaben mit Dezimalzahlen anzuwenden. Hier liegt – nach den Brüchen – dann der eigentliche Schwerpunkt im Rechenunterricht. Der freie Umgang mit den Dezimalzahlen öffnet das Tor zur Welt, er ermöglicht die Teilhabe an der sozialen Umgebung und dem Wirtschaftsleben. Die Verhältnismäßigkeit als Generalthema der 5. Klasse wird zum Schlüssel für dieses Tor; im Rechnen spiegelt sie sich in den durch Multiplikation und Division erreichten Zahlenbeziehungen.

Erinnerung der Grundlagen

Den Einstieg bereiten einige Rechenübungen, die an die korrekte Spaltenschreibweise bei Addition und Subtraktion erinnern, einfache mündliche und schriftliche Multiplikationen schließen sich an, um das schriftliche Verfahren bei mehrstelligen Multiplikatoren wieder zu vergegenwärtigen. Ebenfalls wieder gebraucht werden die Bezeichnungen aus der Stellenwerttafel und daran anschließend die Kommaregeln. Die Multiplikationen und Divisionen mit 10, 100, 1000 als einfache Stellenverschiebung schließt sich an. Die gesamten in Klasse 4 erreichten Rechenfertigkeiten und –regeln (außer der später besprochenen Division) sollen anhand geeigneter Aufgaben wieder verfügbar werden. Anregungen dazu enthalten erfolgende

Aufgabenvorschläge

Mündliche Übungen

1. a) 120 + 50   b) 120 + 5   c) 120 + 0,5   d) 24 + 0,24   e) 24 + 2,4
   f) 12 + 0,3 + 0,04 + 0,005   g) 9,9 + 0,1   h) 18,5 + 1,5   i) 20,04 + 0,16
2. a) 250 – 20   b) 250 – 2   c) 250 – 0,2   d) 10 – 0,3   e) 10 – 1,3
3. a) 40 · 2   b) 25 · 4   c) 330 · 3   d) 10,5 · 2   e) 21,21 · 4
   f) 10,2 · 5   g) 0,5 · 8   h) 1,25 · 3
4. a) 44,4 : 2   b) 8,48 : 4   c) 12,96 : 3   d) 24,08 : 8   e) 16,48 : 4

Multipliziere die Zahlen   a) 5   b) 71   c) 1,5   d) 0,42   e) 0,0102 jeweils mit

5. ×10
6. ×100
7. ×1000:

Dividiere die Zahlen   a) 6000   b) 5800   c) 120   d) 55   e) 20,5 jeweils durch

8. :10
9. :100
10. :1000
11. Wie groß sind die Brüche als Kommazahl (Dezimalbruch)?   Muster: 2½ = 2,5
    a) ½   b) ¼   c) ¾   d) 1¾   e) 2¼   f) $^{1}/_{10}$ g) $^{2}/_{10}$ h) $^{1}/_{100}$ i) $^{5}/_{100}$

Schriftliche Rechnungen

12. a) 432 + 12,4   b) 20,934 + 0,56 + 1,5   c) 13,46 – 2,35   d) 23 – 0,45
    e) 0,6 – 0,16   f) 53,2 + 2,57 – 11,326   g) 746,726 + 345,103 – 425,163
13. Rechenrätsel: Jeder Schüler darf sich eine 3-stellige Zahl frei wählen (1. und 3. Ziffer müssen aber verschieden sein) und sich notieren. Danach wird die Zahl in sich gespiegelt (Tausch von 1. und 3. Ziffer). Ist die neue Zahl dadurch kleiner geworden, wird sie unter die alte geschrieben; falls sie größer wird, kommt sie über die alte. Mit schriftlichem Abziehen wird die Differenz als neue 3-stellige Zahl gebildet (notfalls die 1. Stelle mit 0 füllen). Diese Differenz wird wieder in sich gespiegelt als nun bereits 4. Zahl darunter geschrieben. Die Rechnung endet mit der Addition der 3. und 4. Zeile, also der ursprünglichen Differenz und

ihrer Spiegelzahl. Anschließend vergleichen die Schüler ihre Ergebnisse – und wundern sich darüber[56].

Sachaufgaben

14. a) 23,52€ + 1,28€ b) 2,39€ · 6 c) 4,4km · 5 d) 2,5km + 500m e) 3,26m + 34cm

15. Von dem 2,5m langen Brett werden 1,15m abgesägt. Wieviel bleibt übrig?

16. Aus 0,5kg Erdbeeren, 25g Stärke und 365g Zucker wird Marmelade gekocht. Wieviel Kilogramm Marmelade werden es mit diesem Rezept insgesamt?

17. An die 6,90m lange Werkstattwand soll ein sechsteiliges Regal gebaut werden. Wie lang werden die einzelnen Fächer?

Multiplikation von Dezimalbrüchen

Nachdem die Stellenschreibweise und ihre Anwendung wieder erinnert wurden, kann auch die Multiplikation anhand einfacher Aufgaben nochmals durchlaufen werden. Anfangs beschränken wir uns auf überschaubare ganze Zahlen für den aktiven Multiplikator. Auf dem Weg zu Mehrstelligkeit dürfen einfache oder schöne Zahlen (12; 15; 20; 22; 25; ...) bevorzugt werden.

Aufgaben

1. a) 53 · 3 b) 4205 · 2 c) 45 · 8 d) 925 · 6 e) 238 · 7
2. a) 25 · 12 b) 468 · 55 c) 1357 · 24 d) 9876 · 54 e) 65065 · 82
3. a) 256 · 125 b) 625 · 128 c) 25252 · 248 e) 2468 · 1357
4. Multipliziere die 37 nacheinander mit den Zahlen der 3er-Reihe, also:
   a) 37·3 = ? b) 37·6 = ? c) 37·9 = ? ... bis i) 37·27 = ?

Falls in Klasse 4 noch keine Dezimalzahlen multipliziert wurden, muss die dafür nötige Kommaregel nun entwickelt werden: *Wenn wir eine Dezimalzahl mit einer ganzen Zahl multiplizieren, bleiben gleich viele Nachkommastellen*. Mit den damals bereitgestellten Übungen kann auch der Anschluss an das jetzt erforderliche Niveau erreicht werden. Der nötige Stand ist erreicht mit solchen oder ähnlichen

Aufgaben

Rechenreihen

1. a) 0,5 · 4 b) 0,5 · 40 c) 0,5 · 400 d) 0,5 · 4000 e) 0,5 · 40000
2. a) 0,1 · 500 b) 0,1 · 50 c) 0,1 · 5
3. a) 0,2 · 8000 b) 0,2 · 800 c) 0,2 · 80 d) 0,2 · 8
4. a) 0,03 · 12000 b) 0,03 · 1200 c) 0,03 · 120 d) 0,03 · 12

Schriftliche Multiplikation

5. a) 2,6 · 7 b) 64,5 · 3 c) 824,2 · 6 d) 35,64 · 8 e) 1,323 · 9
6. a) 152,4 · 42 b) 5,839 · 23 c) 901,04 · 34 d) 49,38 · 82
7. a) 9876,5 · 432 b) 135,246 · 354 1,9082 · 1248 (Tipp: zeilenweise verdoppeln)

Sachaufgaben

8) Wieviel Gramm Hefe erhält man mit 4 Würfeln zu je 41,5g ?

9) Im Schulgarten werden die 2 Hauptwege mit 1,25 m langen Platten belegt. Der Längsweg bekommt 26 Platten, der Querweg 14. Wir lang sind die beiden Wege?

---

[56] Alle Schüler kommen zum gleichen Ergebnis 1089; die mathematische Begründung dafür ist allerdings etwas umständlich und wird daher für den Lehrer im Anhang nachgeholt.

10) Das Sportfeld ist 24,5m breit und 48,6m lang. Wie groß ist eine Laufrunde außen herum? Nach 7 Runden ist man bereits über 1km gelaufen. Um wie viel Meter hat man diesen Kilometer überschritten?

Multiplikation mit Dezimalbrüchen

Ein Dezimalbruch als Multiplikator

Bisher enthielt nur der Multiplikand einen Dezimalbruch, welcher bei Sachaufgaben auch noch über die Bemaßung an einen Gegenstand gebunden war; seine Nachkommastellen fanden sich im Ergebnis wieder. Der *Multiplikator* war jeweils eine *ganze Zahl*. Dies entspricht der naiven Auffassung, dass man etwas „mehrfach nehmen“ soll im Sinne einer echten Tätigkeit. Unter dieser Voraussetzung könnte man also eine Zahl zwar mit 3 multiplizieren, aber nicht mit 0,3 oder irgendeinem anderen Dezimalbruch.

Diese enge Bindung ans Gegenständliche soll auch hier zugunsten des freien Rechnens mit reinen Zahlen gelockert werden. Da innerhalb der schriftlichen Multiplikation das Komma überhaupt nicht beachtet wird, genügt das Wissen um die richtige Kommasetzung am Ende der Rechnung: Bei einem Dezimalbruch als Multiplikator übertragen sich dessen Nachkommastellen genauso auf das Ergebnis wie diejenigen des Multiplikanden.

Für die Schüler muss dies kein Problem darstellen, sofern es vom Lehrer nicht ausdrücklich thematisiert wird. Dennoch kann diese Kommaregel aus dem bisher Bekannten begründet werden.

Bruch als Multiplikator

Aus dem Bruchrechnen weiß die Klasse, dass man von einer Menge auch nur einen Teil entnehmen kann. Bei den Anteilen Hälfte und Viertel ist dies sehr geläufig und hilft beim Erinnern: ¼ von 8 hatten wir als Multiplikation geschrieben und den Anteil ¼ als Multiplikator benutzt. Diesen hatten wir damals links geschrieben (bei der schriftlichen Multiplikation von Dezimalzahlen aber für die bequemere Darstellung nach rechts getauscht). Die Multiplikation mit ¼ konnten wir aber genauso gut als Vierteln auffassen mit der Division durch 4:

¼ von 8 = 2 oder $\frac{1}{4} \cdot 8 = 2$ oder $8 : 4 = 2$

Von der Stellenwerttafel kennen wir die Schreibweisen von Dezimalbrüchen:

0,1 = 1z = 1 Zehntel = $^1/_{10}$ 0,01 = 1h = 1 Hundertstel = $^1/_{100}$

Wenn wir eine Zahl mit einem solch einfachen (nur mit Nullen und einer 1 geschriebenen) Dezimalbruch malnehmen wollen, können wir wie früher beim Bruchrechen den entsprechenden Bruchteil dieser Zahl nehmen. Wir müssen sie also nur teilen und benutzen dazu die einfache Regel der Stellenverschiebung aus Klasse 4. Beim malnehmen mit 0,1 nehmen wir daher den 10ten Teil. Bei der Division durch 10 mussten wir fürs Ergebnis nur 1 Stelle verschieben:

$200 \cdot 0{,}1$	oder $200 \cdot {}^1/_{10}$	oder $200 : 10 = 20{,}0$	also $200 \cdot 0{,}1 = 20{,}0$
$20 \cdot 0{,}1$	oder $20 \cdot {}^1/_{10}$	oder $20 : 10 = 20$	also $20 \cdot 0{,}1 = 2{,}0$
$2 \cdot 0{,}1$	oder $2 \cdot {}^1/_{10}$	oder $2 : 10 = 0{,}2$	also $2 \cdot 0{,}1 = 0{,}2$
$0{,}2 \cdot 0{,}1$	oder $0{,}2 \cdot {}^1/_{10}$	oder $0{,}2 : 10 = 0{,}02$	also $0{,}2 \cdot 0{,}1 = 0{,}02$

Weitergabe der Nachkommastellen

In beiden Herleitungen überträgt sich die Nachkommastelle des Multiplikators auf das Ergebnis. Der dabei gewählte Weg lässt sich statt für Zehntel auch mit Hundertsteln oder Tausendsteln anwenden. Der Multiplikator darf auch andere Ziffern tragen: 0,3 lässt sich als „3 Zehntel“ lesen oder auch als „3 mal 1 Zehntel“.

Die Multiplikation durfte bei den Brüchen schrittweise erfolgen, egal in welcher Reihenfolge.

¾ von 8   war möglich über

a) erst verdreifachen auf von 8 auf 24 und danach ¼ davon:

$3 \cdot 8 = 24$ $\frac{1}{4} \cdot 24 = 6$ oder

b) erst vierteln und danach verdreifachen auf 6

¼ von 8 = 2 $3 \cdot 2 = 6$

Genauso dürfen wir beim Multiplikator 0,3 dessen 3 Zehntel voneinander unabhängig verarbeiten, am einfachsten erst mit 3 malnehmen und dann davon den 10ten Teil (durch Stellenverschiebung):

$200 \cdot 0{,}3 = ?$

erst verdreifachen $200 \cdot 3 = 600$ danach 1/10 davon $600 : 10 = 60{,}0$

also $200 \cdot 0{,}3 = 60{,}0$

und genauso mit anderen Zahlen:

$20 \cdot 0{,}3 = ?$	$20 \cdot 3 = 60$	$60 : 10 = 6{,}0$	also $20 \cdot 0{,}3 = 6{,}0$
$2 \cdot 0{,}3 = ?$	$2 \cdot 3 = 6$	$6 : 10 = 0{,}6$	also $2 \cdot 0{,}3 = 0{,}6$
$0{,}2 \cdot 0{,}3 = ?$	$0{,}2 \cdot 3 = 0{,}6$	$0{,}6 : 10 = 0{,}06$	also $0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}06$

Wenn wir mit 0,03 multiplizieren sollen, übertragen wir das Verfahren auf 3 Hundertstel und machen es genauso, nur dass wir nun um 2 Stellen verrutschen müssen. Wir erhalten damit:

$200 \cdot 0{,}03 = ?$ erst $200 \cdot 3 = 600$ dann $600 : 100 = 6{,}00$ also $200 \cdot 0{,}03 = 6{,}00$

Und mit den anderen Zahlen entsprechend:

$20 \cdot 0{,}03 = 0{,}60$ $2 \cdot 0{,}03 = 0{,}06$ $0{,}2 \cdot 0{,}03 = 0{,}006$

Die eingangs vorgeschlagenen Rechenreihen können jetzt ebenfalls beliebig fortgesetzt werden: Von $0{,}1 \cdot 50$; $0{,}1 \cdot 5$; über $0{,}1 \cdot 0{,}5$ und weiter. In allen Fällen sehen wir aber, dass beide beteiligten Zahlen, Multiplikand wie Multiplikator, die Anzahl ihrer Nachkommastellen an das Ergebnis weitergeben.

Tausch der Faktoren

In der 4. Klasse durfte beim Multiplizieren nur der Multiplikand ein Dezimalbruch sein und der Multiplikator als ganze Zahl nahm diesen mehrfach. Nun können wir auch mit einem Dezimalbruch multiplizieren, egal wen, ob eine ganze Zahl oder einen anderen Dezimalbruch. Beim Rechnen mit reinen Zahlen ist es ab jetzt egal, wer von den beiden Zahlen der aktive Täter (Multiplikator) oder die erduldende Zahl (Multiplikand) ist. Ohne dass sich das Ergebnis ändert, dürfen wir beim Multiplizieren die beiden vertauschen. Genauso wie früher bei den ganzen Zahlen müssen sie nicht mehr unterschieden werden:

$20 \cdot 3 = 60$ oder $3 \cdot 20 = 60$ ebenso: $0{,}2 \cdot 0{,}03 = 0{,}006$ oder $0{,}03 \cdot 0{,}2 = 0{,}006$

Das *Ergebnis der Multiplikation* nennen wir *Produkt*, die beiden beteiligten Zahlen sind die *Macher* des Produkts, sie fabrizieren es und tragen daher den Namen *Faktor*[57]. Künftig bevorzugen wir den Faktor mit der kürzeren Ziffernfolge als Multiplikator und tauschen dazu notfalls die Faktoren aus.

Schriftliche Multiplikation mit Kommasetzung

Für die Rechnung selbst ist es egal, ob die Zahlen ein Komma haben oder nicht. Wir rechnen mit dem bisherigen Verfahren wie mit ganzen Zahlen. Erst danach setzen wir das Komma im Endergebnis (dem Produkt) mit der

[57] Das zugehörige lateinische Verb facere heißt „machen, tun“; den Schüler kann der Hinweis auf das englische Wort „factory“ (Fabrik) nützlich sein.

Komma-Regel bei der Multiplikation :

Nach dem Malnehmen zählen wir so viele Kommastellen ab, wie beide Faktoren zusammen gehabt haben.

Oder:

Das Produkt hat gleich viel Kommastellen wie seine Faktoren zusammen.

Unabhängig von der Art der Hinführung wird die künftige Arbeitsweise als Kurztext im Schülerheft notiert und in einigen gemeinsamen mehrstelligen Multiplikationen angewandt, in denen auch unterschiedliche Situationen auftreten können, wie zum Beispiel in:

a) 48,1 · 2,734 = ? b) 172,4 · 3,06 c) 3726 · 21,5

2,	7	3	4	·	4	8,	1
	1	0	9	3	6		
		2	1	8	7	2	
				2	7	3	4
	1	3	1,	5	0	5	4

a) Die Aufgabe 48,1 · 2,734 würde 4 Einzelprodukte als Rechenzeilen erfordern; wenn wir die beiden Faktoren zu 2,734 · 48,1 tauschen, kommen wir mit 3 Zeilen aus. Manchmal können wir eine Folgezeile durch Verdoppeln erreichen, ohne neu malzunehmen (hier aus der Zeile mit ·4 die Folgezeile mit ·8). Die Faktoren haben hier zusammen 4 Kommastellen, die wir auf das Ergebnis übertragen.

1	7	2,	4	·	3,	0	6
		5	1	7	2	0	
			1	0	3	4	4
		5	2	7,	5	4	4

b) Bei Nullen innerhalb der Ziffernfolge entsteht eigentlich eine leere Rechenzeile, diese können wir künftig auslassen. Die verursachende Null hängen wir der Vorzeile an, damit die Spalten an die richtige Stelle kommen. Hier entstand die 2. Zeile 10350 durch Verdoppeln von 5175. Die beiden Faktoren geben 3 Kommastellen an das Ergebnis weiter.

3	7	2	6	·	0,	1	5
			3	7	2	6	
			1	8	6	3	0
			5	5	8,	9	0

c) Bei 3726 · 0,15 benötigt die führende 0 des Multiplikators keine eigene Rechenzeile, wenn die richtigen Spalten eigehalten werden. Die 2. Zeile kann geprüft werden: Durch Verdoppeln muss sich Zeile 1 ergeben. Das Ergebnis bekommt zwei Kommastellen, von denen eine nachträglich entfallen darf: 3726 · 0,15 = 558,90 = 558,9.

Die in Klasse 4 erlernte mehrstellige Multiplikation kann nun mit der ergänzten Kommasetzung weiter geübt und zur frei verfügbaren Fertigkeit gesteigert werden. Die Klasse braucht dazu Übungsmaterial im Rahmen der nachfolgend vorgeschlagenen

Aufgaben

1. a) 8 · 2,5[58] b) 925 · 0,6 c) 18,5 · 12 d) 1,25 · 64 e) 2,4 · 6235[59]

2. a) 0,242 · 21 b) 287 · 0,48 c) 3,3 · 3,1 d) 2,86 · 0,32 e) 4,24 · 85,28

3. a) 0,23 · 0,35 b) 0,049 · 018 c) 8020 · 0,021 d) 0,3852 · 4500 e) 0,534 · 0,20408

4. Eine Kunde lässt sich von der 3m breiten Teppichrolle ein 4,2m langes Stück abschneiden. Weil für den Quadratmeter 19,80€ verlangt werden, kostet jeder laufende Meter das 3-fache.

a) Wie viel kostet jeder abgerollte Meter?

b) Wie viel kostet die gewünschte Teppichgröße?

[58] Bequemrechnen anwenden, also 2,5 mehrfach verdoppeln oder 8 durch 4 mal 10

[59] Tipp: Faktoren tauschen

5. In einem Haushalt wurde der Stromverbrauch des vergangenen Jahres abgerechnet. Es waren 3465 kWh (Kilowattstunden), die mit je 26,8 Cent berechnet werden. Wie hoch waren die Stromkosten in diesem Jahr?

6. Der Garten soll einen 21,6m langen Zaun bekommen. Für den laufenden Meter berechnet der Handwerker pauschal 42,35€. Wie viel wird der Zaun kosten?

Mit den vorstehenden Beispielen ist das Arbeitsfeld abgesteckt, innerhalb dessen der Klasse ein ausreichendes Kontingent an geeigneten Rechenaufgaben übergeben wird, möglicherweise auch als Block zur freien Bearbeitung über einen längeren Zeitraum. Auch können die im Abschnitt „Sachrechnen“ besprochenen Schritte einbezogen werden, damit das Rechnen nicht nur Selbstzweck bleibt.

Division von Dezimalbrüchen

Vorwissen aus Klasse 4

Wurde die schriftliche Division erst in Klasse 4 neu eingeführt, so konnten die Schüler mangels Übungszeit darin kaum Routine erreichen. Dem entsprechend wurde damals darauf hingewiesen, dass dies in die 5. Klasse verschiebbar sei. Anhand des für die 4. Klasse vorgeschlagenen Arbeitsfeldes sind dann hier in Klasse 5 die nötigen Schritte nachzuholen

Die nötigen Voraussetzungen für die Weiterarbeit mit Dezimalbrüchen sind erreicht, wenn die Schüler Divisionen bearbeiten können gemäß dieser

Aufgaben

a) 282 : 6 b) 3752 : 8 c) 552 : 12 d) 9828 : 21 e) 40722 : 33

Da sich die Divisionen von Dezimalbrüchen auf gleiche Weise durchführen lässt wie mit ganzen Zahlen, werden weitere Aufgaben möglich nach Erinnerung – oder hier mit Neueinführung – an die Kommaregel aus Kl.4: *Wenn wir beim Teilen das Komma überschreiten, machen wir gleichzeitig auch beim Ergebnis das Komma*. Damit können alle bisherigen Divisionen von ganzen Zahlen auch mit Komma im Dividenden versehen werden und den Aufgabenfundus erweitern. Statt 9828 : 21 lassen sich dann auch 982,8 : 21 oder 98,28 : 21 bearbeiten.

Das Divisionsverfahren

Die Hürden der Division

Generell wird in allen Klassen auffallen, dass die Division von den Kindern als schwierig empfunden wird. Diese Einschätzung erkennen wir als sachlich berechtigt an: Das Teilen erfordert außer der Division (wir fragen in der Regel nach dem Enthaltensein) auch noch Multiplikation und Subtraktion in einer strengen Regelfolge. Das wirklich Neue daran aber ist, dass mit einer gesunden Größenvorstellung die jeweils nächste Ziffer (als Teilergebnis) voraus gesagt werden muss, bevor es durch die Rechnung gestützt (oder auch verworfen) wird. Zum ersten Mal greift die eigene Entscheidung beurteilend in den Rechengang ein und ihre Richtigkeit ist erst nachträglich überprüfbar! Durch viel Lob bei erfolgreichen Einzelschritten stellen wir die Herausforderungen als lohnenswerte Ziele für einen gesunden Schüler-Ehrgeiz heraus.

Schwächere Schüler sind aber an dieser Stelle schnell und gründlich frustriert. Es ist sinnvoll abzuwägen, in welcher Form wir ihnen die zu steilen Stufen gangbarer machen. Neben leichteren Aufgaben darf auch arbeitsteiliges Zusammenwirken in einer Gruppe angeboten werden. Für eine gewisse Zeit mag eine 1x1-Tabelle mit dem 2- bis 9-fachen des Divisors als Nebenrechnung helfen.

Die verbliebene Hürde des sinnvollen Abschätzens durch eigene Größenbeurteilung muss später dennoch überwunden werden; das dann erübte Runden fördert aber die Sicherheit im

Zahlenraum und dadurch auch das Teilen. Auf dem Weg dahin sind Teiler empfehlenswert, die eng benachbart sind zu einer einfachen, „runden“ Zahl. Beispielsweise kann einem Teiler der Größe 58 gefragt werden, wie oft wohl die benachbarte 60 enthalten sei, um auf die nächste Ziffer im Quotienten zu kommen.

Erleichternd ist auch, wenn im Quotienten (außer in der letzten Ziffer) keine 0 oder 9 vorkommt, oder wenn sich Ziffern wiederholen.
Beispiele für Divisionen in verschiedenen Schwierigkeitsgraden (mit oder ohne Komma) bieten nachfolgende

Aufgaben

- sehr leicht a) 4059 : 11 b) 148,8 : 12 c) 50,82 : 21 d) 16650 : 25 e) 2319,9 : 19
- leicht f) 547,42 : 101 g) 1229,6 : 29 h) 213,61 : 41 i) 65790 : 102
- mittel j) 227,948 : 98 k) 3421,6 : 52 l) 279600 : 48 m) 2473,2 : 36
- schwierig n) 719,04 : 84 o) 3750,6 : 57 p) 2960,06 : 47 q) 21884,8 : 56
- mit Tücken, Abbruch nach 5 Ziffern erlaubt r) 63,6056 : 86 s) 590 : 22 t) 17,66 : 14

Sonderfälle und Fehlerquellen

Nach ausreichender Übung von normalen Aufgaben weisen wir auf einige spezielle Situationen hin, die bereits in den letzten Aufgaben n-r) eine gewisse Erschwernis bereiten.

1	5	0	8	,4	: 12 = 1 2 5 ,7
1	2				
	3	0			
	2	4			
		6	8		
		6	0		
			8	4	
			8	4	

Zunächst können Nullen im Dividenden den Rechengang verunsichern.

Doch diese werden genauso wie jede andere Ziffer in die neue Zeile abgeholt und fügen dort eine Stelle hinzu, um damit weiter zu arbeiten. Der senkrechte Doppelstrich weist auf das Komma hin, beim Überschreiten wird das Komma im Ergebnis gesetzt.

Ein ähnliches Problem kann entstehen, wenn

4	7	,1	5	: 23 = 2 ,0 5
4	6			
	1	1		
	0	0		
	1	1	5	
	1	1	5	

während der Division im Ergebnis (Quotient) unerwartet eine Null entsteht. Bei der Division 47,15 : 23 ist in der 3. Zeile trotz Abholen einer weiteren Stelle die Zahl 11 kleiner als der Divisor, welcher daher 0-mal enthalten ist. Diese 0 muss natürlich wie jede andere entstehende Ziffer im Ergebnis notiert werden, gemeinsam mit dem gleichzeitig überschrittenen Komma davor.

0	0	9	5	*0*	: 38 = 0 ,0 0 2 4
0	0				
	0	9			
	0	0			
		9	5		
		7	6		
		1	9	0	
		1	9	0	

Mit anführenden Nullen gehen wir genauso um. Bei nebenstehenden Beispiel notieren wir sicherheitshalber die volle Stellenlänge beim Produkt des Divisors, also 38 · 0 = 00; damit vermeiden wir Stellungsfehler in der Spalte. Auch geht die Division nicht mit der letzten Ziffer auf. Eine ergänzende 0 ersetzt die fehlende Nachkommastelle, wodurch der Quotient mehr Dezimalen als der Dividend bekommt.

5	1	8	,6	*0*	*0*	: 24= 2 1 ,6 0 8(...)
4	8					
	3	8				
	2	4				

1	4	6		
1	4	4		
		2	0	
		0	0	
		2	0	0
		1	9	2
				8

Geht eine Division nicht auf, kann erlaubt werden, mit der 3. Nachkommastelle abzubrechen. Diese Vorgabe ist auch hilfreich, falls sich ein Schüler bei Hausaufgaben verrechnet und dadurch in eine unnötige Verlängerung der Rechnung gerät. Beginnt der Quotient mit führenden Nullen, sind dahinter wenigstens 3 geltende Ziffern nötig. Ansonsten entscheidet bei Sachaufgaben das jeweilige Anwendungsgebiet über die nötige Stellenzahl und Rundung.

1	5	,0	8	*0*	*0*	: 12 = 1 ‖ ,2 5 │ 6 │ 6...
1	2					
	3	0				
	2	4				
		6	8			
		6	0			
			8	0		
			7	2		
				8	0	
				7	2	
					8	

Bei einer nicht aufgehenden Division können sich Ziffern wiederholen bei ständig gleich bleibendem Rest. Der Quotient bricht also nie ab, doch kennt man alle Ziffern Folgestellen, weil sie periodisch wiederkehren. Auf diese wird mit 3 Punkten hingewiesen und die Rechnung darf beendet werden.

Der richtige Umgang mit periodischen Dezimalbrüchen sowie ihren Zusammenhang mit gewöhnlichen Brüchen wird noch gesondert dargestellt.

Auf einen häufig wiederkehrenden Rechenfehler sei ausdrücklich hingewiesen, der mit dem Komma nichts zu tun hat, sondern von den schwerer abzuschätzenden zwei- und mehrstelligen Teilern verursacht wird.

9	9	,8	4	: 16 = 51 ‖ ,2 │
8	0			
1	9			
1	6			
	3	8		
	3	2		

9	9	,8	4	: 16 = 5+1 ‖ ,2 │
8	0			
1	9	8		
1	6			
	3	8		
	3	2		

Er unterläuft, wenn der zu erwartenden Anteil zu gering eingeschätzt wird – bei obigem Beispiel statt der ersten *6* vielleicht nur *5*. Dadurch wird beim Abziehen *(nur minus 80 statt 96)* der Rest *(jetzt 19 statt nur 3)* größer als der Teiler. Weil dieser nun ohne Abholen noch einmal passt, besteht die Gefahr einer zusätzlichen 1 im Ergebnis und die Stellenschreibweise führt zur Lesart 51, obwohl beide Ziffern gemeinsam ins Einerfach gehören und als 5+1 dann 6 ergeben müssten. Ein ähnlicher Fehler unterläuft auch, wenn nach Abholen der nächsten Ziffer der Teiler über zehnmal passt.

9	9	,8	4	: 16 = 5 ‖ ,12 │ 4
8	0			
1	9	8		
1	9	2		

6 4
6 4

9 9 ‖ ,8 4 : 16 = 6 ‖ ,2 | 4
9 6
3 ‖ 8
3 ‖ 2
‖ 6 4
‖ 6 4

Gute Schüler werden diesen Fehler rasch durchschauen und ihn sinnvoll korrigieren, vielleicht sogar die überzählige 1 richtig der 5 weiter reichen. Als Arbeitsregel für die Klasse ist es aber besser, mit einem sauberen schrägen Strich die Ziffer 5 im Ergebnis und die 80 in der Staffel zu streichen. Der drohende Fehler wird damit rechtzeitig abgewendet: Die durchgestrichenen Zahlen verkünden also keine Unfähigkeit, sondern eine Erkenntnis!

Division durch Dezimalbrüche

Wiederum: Enthaltensein statt Teilen!

Die Division durch echte Brüche – zum Beispiel ¾ : $^1/_8$ = 6 (besser: = 6-mal) – ergab das verblüffende Ergebnis, dass die Portion größer sein konnte, als das zu Verteilende. Ähnliches geschieht natürlich auch, wenn durch einen entsprechend kleinen Dezimalbruch dividiert wird:

9 : 0,03 = 300

Dass beim Aufteilen der 9 eine solch übergroße Zahl das richtige Ergebnis nennen soll, erscheint wenig glaubhaft, weil nach dem (Ver-)Teilen mehr erscheint, als vorher überhaupt da war. Doch mit demselben Argument wie damals lässt sich diese Merkwürdigkeit als Scheinproblem enttarnen.

Echtes Verteilen ist eben nur mittels ganzzahliger Teiler möglich. Bei Bruchteilen können wir nur fragen, wie oft sie enthalten sind. Genauso wie $^1/_8$ eben 6-mal in ¾ passt, ist auch der winzige Splitter 0,03 dann entsprechend 300-mal in den 9 Ganzen enthalten.

Messen mit vergleichbarem Maß

Bei der Vorgehensweise Enthaltensein wird der Vorrat (Dividend) mit der Portion gemessen und man erfährt, wie oft diese enthalten ist. Dazu müssen natürlich die beiden Größen vergleichbar sein. Bei den Brüchen war dies ein gemeinsamer Nenner, hier werden gemeinsame Dezimalen gebraucht. Das klingt ungewöhnlich, ist aber eigentlich bekannt.

Die Aufgabe 240 : 60 deuten wir als Frage: „Wie oft ist in 240 die 60 enthalten?“ Wir vereinfachen sie, indem wir die Zehnerstelle als Vergleichsmaßstab nutzen: „Wie oft sind in 24 Zehnern die 6 Zehner enthalten?“ und erhalten die Antwort: „4-mal“.

Die beiden Rechnungen 240 : 60 und 24 : 6 erscheinen für Schüler als verschiedene Augaben, und doch entsprechen sie einander, vor allem haben sie dasselbe Ergebnis.

Gleiche Dezimalen

Dass dieser Ansatz auch bei Dezimalbrüchen möglich ist, zeigt die Frage

Wie viel Buntstifte zu je 1,25€ erhält man für 5€?

Ein gemeinsames ganzzahliges Maß wird mit dem Wechsel auf Cent erreicht: „Wie oft ist in 500Ct der Preis von 125 Ct enthalten?“ Wiederum sind zwei unterschiedlich erscheinende Rechenwege mit demselben Ergebnis möglich:

5 € : 1,25 € = 4-mal oder 500 Ct : 125 Ct = 4-mal

Da unser Dezimalsystem für jede Stelle mit deren Bezeichnung ein eigenes Maß bereitstellt, können wir die Aufgabe übertragen, indem wir statt Cent nun Hundertstel (oder mit unserer alten Abkürzung 1Ct = 1h) nehmen:

5 : 1,25 oder 5,00 : 1,25 oder 500 h : 125 h = 4-mal

Division durch ganze Zahl

Mit der nun erreichten Stellenverschiebung können wir immer einen ganzzahligen Divisor erreichen, egal wie viele Dezimalen er in der Aufgabe hatte:

Aus 34 : 0,5 machen wir 340 z : 5 z

Von 0,045 : 0,03 kommen wir entsprechend zu 45 t : 30 t oder besser 4,5 h : 3 h

Sobald der Divisor ganzzahlig wurde, kann wie früher durch ihn dividiert werden. Zwar sieht es aus, als ob statt der Original-Aufgabe eine andere gerechnet würde, aber das Ergebnis bleibt sicher dasselbe:

Statt	34 : 0,5	rechnen wir	340 : 5 = 68
Statt	0,045 : 0,03	rechnen wir	4,5 : 3 = 1,5

Damit formulieren wir mit der Klasse die

Komma-Regel bei der Division

Weil wir durch eine Dezimalzahl nicht teilen können, verschieben wir erst das Komma an das Ende des Teilers; im Vorrat (Dividend) müssen wir aber das Komma auf gleiche Weise verschieben.

Oder kurz:

Der Divisor muss kommafrei sein. Dazu darf das Komma von Dividend und Divisor auf gleiche Weise verschoben werden.

Die zweite Version schließt durch ihre universellere Formulierung auch die Kommaverschiebung nach links mit ein:

14910 : 2100 = ? kann damit vereinfacht werden zu

149,10 : 21,00 = ? oder kurz 149,1 : 21 = ?

Diese Möglichkeit wurde einleitend mit dem Übergang zur größeren Zähleinheit schon vorweggenommen, damit war das Prinzip bereits bekannt; lediglich auf eine Kommasetzung im Divisor wurde verzichtet. Die Schüler sollen aber auf jeden Fall diese Vereinfachung nutzen und bei Divisionsstaffeln keine Nullen als unnötige Stellen mitschleppen. Die Arbeit wird einfacher und dadurch sicherer.

Aufgaben

1. Bereite die Division durch Kommaverschiebung vor

a) 535,04 : 0,16 b) 2,989 : 0,49 c) 126 : 8,4 d) 2400 : 0,32

2. Vereinfache die Division durch geeignete Kommaverschiebung

a) 21252 : 2200 b) 247200 : 480 c) 4,598 : 190 d) 14175 : 70000

Umwandlung von Brüchen

Grundsätzliches

Den Dezimalbrüchen liegt der Gedanke zugrunde, das dezimale Stellenwertsystem auf Zehnerbruchteile auszuweiten und damit die dekadische Gliederung rechts vom Komma fortzusetzen.

Das bringt einige Vorteile mit sich:

- Ein Größenvergleich ist unmittelbar möglich
- Die bekannten schriftlichen Rechenverfahren können unverändert auf Dezimalbrüche übertragen werden
- Addition und Subtraktion sind sehr einfach
- Bei praktischen Anwendungen ist die Genauigkeit von Maßangaben sofort sichtbar.

Doch verbleiben auch Nachteile:

- Die Multiplikation und Division von Dezimalbrüchen sind (ohne Verwendung von Taschenrechnern) deutlich aufwendiger als bei gewöhnlichen Brüchen
- Teilerverhältnisse und Proportionen sind nicht sichtbar
- Viele Brüche führen in der Dezimal-Darstellung zu nicht abbrechenden periodischen Ziffernfolgen.

Daraus erklärt sich die unterschiedliche Nutzung der beiden Darstellungsarten: Dezimalbrüche sind vor allem vorteilhaft in praktischen Anwendungen, bei denen Messergebnisse verwendet und verarbeitet werden. Sachrechnungen werden wir daher fast ausschließlich mit Dezimalzahlen durchführen. Zum Ausdruck rein mathematischer Beziehungen sind dagegen die gewöhnlichen Brüche vorzuziehen.

Daher müssen die Schüler in die Lage versetzt werden, mit beiden Möglichkeiten frei umzugehen und darüber hinaus von der einen Darstellungsart zur anderen wechseln zu können. Ob dabei die – unendlich langen – periodischen Dezimalbrüche als Exoten in der 5. Klasse gelegentlich vorkommen und ihre systematische Behandlung für die 6.Klasse aufgespart bleibt, kann vom Lehrer frei abgewogen werden. Die wichtigsten Schritte dazu werden jedenfalls im Folgenden dargestellt.

Vom gewöhnlichen Bruch zum Dezimalbruch

Brüche und Hunderterteilung

Bereits in der 4. Klasse bestand die Möglichkeit, gewöhnliche Brüche in Dezimalbrüche umzuformen. Selbst wenn damals nicht extra darauf eingegangen wurde, müssten alleine durch das mehrfache Auftreten innerhalb der Division die einfachen Bruchteile wie ½ oder ¼ in ihrer dezimalen Schreibweise als 0,5 und 0,25 zur alltäglichen Gewohnheit geworden sein. Wenn dies noch nicht selbstverständlich geworden ist, kann noch einmal auf die in Klasse 4 vorgeschlagene Stückelung des Geldes eingegangen werden als sinnvolle Wiederholung oder Vorspann zur nachfolgenden Teilung, welche ja eigentlich den Anlass zur Bruchschreibweise darstellte.

Wir hatten als Bruchteile eines ganzen Euros zwar nur die üblichen Münzen betrachtet, doch lässt sich daraus deren Besonderheit ablesen:

½€ = 50 Ct oder ½ = 0,5   1/5€ = 20Ct also 1/5= 0,2   oder 1/20 = 0,05

Alle die bei der Geldstückelung möglichen Bruchteile vertragen sich mit der Hunderter-Teilung.

Umwandlung durch Erweitern

Den soeben benutzten Beispielen ist gemeinsam, dass ihre Nenner nur Vielfache von 2 und 5 enthalten. Solche Brüche lassen sich immer auf einfache Weise in Dezimalbrüche umwandeln. Wir müssen nur mit den fehlenden Vielfachen von 2 oder 5 erweitern zu vollem 10er, 100er, 1000er und so weiter, wie zum Beispiel bei

1/4=1/2×2

wo wir mit 5×5 = 25 erweitern und erhalten:

$$\frac{1}{4} = \frac{1 \times 25}{4 \times 25} = \frac{25}{100} = 0{,}25.$$

oder mit dem Nenner 125 = 5×5×5, dem die Ergänzung 2×2×2 zum 1000er verhilft:

$$\frac{3}{125} = \frac{3 \times 2 \times 2 \times 2}{125 \times 2 \times 2 \times 2} = \frac{3 \times 8}{125 \times 8} = \frac{24}{1000} = 0{,}024$$

Umwandlung durch Division

Aber die einfachste Umwandlung erreichen wir mit der Deutung eines Bruches als Größe, als Bruchstück eines oder mehrerer Ganzen, die aufgeteilt wurden. Die mit dem Bruchstrich gemeinte Division führen wie bisher durch, etwa bei 5/16 als

$$\frac{5}{16} = 5 : 16 = 0{,}3125$$

Periodische Dezimalbrüche

Unendlich viele Stellen

Nun gibt es aber Brüche, deren Nenner als Primfaktoren nicht nur 2 und 5 enthalten. Schon der Bruch 1/3 kann nicht so erweitert werden, dass im Nenner eine 10 oder 100 oder 1000 oder… auftritt, weil 3 in keinem glatten Zehnern enthalten ist. Und versucht man durch fortgesetzte Division, die Dezimalstellen zu bestimmen, so erhält man

1/3 = 1 : 3 = 0,333…

und kommt zu keinem Ende: Bei der Division nach dem Komma ergibt sich immer wieder der gleiche Rest 1 und mit der angehängten 0 die Zahl 10 die nächste 3 im Ergebnis, aber wieder den Rest 1 erzeugt, ohne Ende! Es gibt also *unendlich lange* Dezimalbrüche.

Diesem Problem konnten wir auch schon bei normalen Divisionsaufgaben begegnen. Für die Praxis spielen diese nicht abreißenden Stellen keine Rolle, weil man bei allen Maßen sowieso keine beliebigen Genauigkeiten erreichen kann und auch nicht muss. Man darf also vor allem im Sachrechnen getrost – je nach möglicher oder gewünschter Genauigkeit – einen unendlichen Dezimalbruch an entsprechender Stelle abbrechen, auf- oder abrunden und dann mit dieser gewonnenen Zahl weiter arbeiten.

Periodische Wiederkehr

Mathematisch exakt ist dies aber nicht. Um zu zeigen, dass man alle noch folgenden Dezimalstellen kennt, auch wenn man sie gar nie zu Ende schreiben kann, wurde dafür eine besondere Schreibweise vereinbart. Schon die angehängten Pünktchen bei 1/3 = 0,333... sollen andeuten, dass es immer so weiter geht. Doch gibt es auch andere Brüche, die längere Ziffernfolgen brauchen, bis diese als Block wiederkehren, etwa bei

1/11 = 0,0909$\underline{09}$... Xxx Überstrich?

Den Zyklus dieser dann wiederkehrenden Ziffernfolge nennt man die Periode des Bruchs. Sie wird mit einem Überstrich in genau gleicher Länge gekennzeichnet, die Pünktchen am Ende dürfen dann auch entfallen. Häufig ist die Primzahl 3 die Verursacherin, hier besteht die Periode nur aus 1 Ziffer. Beim Nenner 11 reichen 2 Ziffern.

Aber es gibt auch sehr unangenehme Brüche oder Divisionen, bei denen die Periodenlänge viel größer wird, etwa bei

1/7 = 0,142857$\underline{142857}$

wo die Periodenlänge schon 6 Ziffern hat.

Periodenlänge

Es ist deutlich, dass in der 5.Klasse solche Besonderheiten kaum mehr Platz haben können. Man wird also ein rechtzeitiges Abbrechen und Runden erlauben und auch empfehlen, um den Rechenalltag dadurch nicht zu belasten. Damit der Lehrer gegen überraschende Rückfragen gewappnet ist, seien die Grundregeln für die Periodenlänge genannt:

Beim Dividieren können unendliche Dezimalbrüche entstehen. Die Verursacher sind die Primfaktoren im Divisor (oder im Nenner eines umzuwandelnden Bruchs) außer 2 und 5. Die Periodenlänge bleibt mindestens um 1 unter der verursachenden Primzahl (wie bei 7 mit 6 Ziffern), oft beträgt sie deutlich weniger (bei 11 nur 2 Ziffern; bei 13 genügen 6 Ziffern). Beginnt der Periodenblock sofort mit der 1. Nachkommastelle, so heißt die Zahl rein periodisch, liegen noch fremde Ziffern davor, so heißt sie gemischt periodisch. Periodische Dezimalbrüche kann man nur durch einen Bruch mit geeignetem Nenner (der die verursachende Primzahl enthält) umgehen.

Einfache periodische Dezimalbrüche

Bei Bruchumwandlungen oder Divisionen, vor allem im Sachrechnen, können rasch periodische Dezimalbrüche entstehen. Dabei dürfen die charakteristischen Ziffernfolgen vertraut werden, welche von den häufigen vorkommenden Teilern oder Nennern 3, 6, 9, 12 und 15 abstammen:

$^1/_3 = 0{,}333...$ $^1/_6 = 0{,}1666...$ $^1/_{12} = 0{,}8333...$ $^1/_{15} = 0{,}0666...$

wozu noch die interessante 9tel-Reihe kommen kann:

$^1/_9 = 0{,}111...$ $^2/_9 = 0{,}222...$ $^3/_9 = 0{,}333...$ bis $^9/_9 = 0{,}999...$ mit dem erstaunlichen Ergebnis, dass 0,999... und 1,000... denselben Wert besitzen müssen, weil $^9/_9 = 1$ ist[60].

Vom Dezimalbruch zum gewöhnlichen Bruch

Bruch und Dezimalbruch

Für die Schüler bleibt oft rätselhaft, warum zwischen gewöhnlichen (also ganzen) Zahlen und den von ihnen gerne Kommazahlen genannten ein so großer Unterschied bestehen soll, dass die letzteren Dezimalbrüche genannt werden. Diese sind doch auch nur normale Zahlen, eben mit einem Komma darin. Andererseits ist ihnen aber durchaus klar, dass 0,5 nur ein Bruchteil des Ganzen ist, in diesem Fall ½. Aber wie steht es zum Beispiel mit 6,25? Unbestreitbar sind es 6 Ganze und noch 0,25; letzteren Teil erkennt man als ¼ wieder und sieht

6,25 = 6 + 0,25 = 6 + ¼ = 6¼

Mit dieser Betrachtungsweise wird deutlich, dass die sogenannten Kommazahlen dem entsprechen, was wir im Bruchrechnen eine gemischte Zahl genannt hatten. Der Anteil hinter dem Komma ist dann ein *echter Dezimalbruch*, weil er eben nur ein Bruchteil eines Ganzen ist.

Demnach wäre die gesamte Zahl gemeinsam mit ihren Vor- und Nachkommastellen ein unechter Dezimalbruch. Doch diese Unterscheidung weder üblich noch sinnvoll. Der Weg vom Komma nach links (nach vorn) gliedert die ganze Zahl nach positiven Zehnerpotenzen (10; 100; ...), rechts vom Komma ist der Wert nach den *negativen* Potenzen von 10 gegliedert.[61]

Jede Stelle hinter dem Komma steht für eine Dezimale, also für einen dekadischen Bruch mit Nennern aus den Zehnerschritten 1/10; 1/100; 1/1000; ...; diese hatten wir als sinnvolle Fortführung des Dezimalsystems nach rechts eingeführt, und in der Stellentafel mit z; h; t; ... bezeichnet. Beim Rückgriff aus das so geläufige Bild des Geldes wird das den Schülern wieder am schnellsten deutlich:

---

[60] Tatsächlich hat jeder Dezimalbruch 2 Darstellungsformen mit der Periode 9 oder 0 (wobei letztere nie geschrieben wird), also 0,999... = 1,000... = 1 oder auch 0,4999... = 0,5000... = 0,5

[61] Der Potenzbegriff wird nach dem Waldorflehrplan in der 7. Klasse eingeführt – negative Potenzen sogar erst später. Auf dieser Stufe kann man vielleicht einfach deutlich machen: Die Zahlen 10; 100; 1000;… entstehen aus der 1, indem man jeweils mit 10 multipliziert zu 10^1; 10^2; ..., also zu 10; 100; ... Nach rechts gelangt man, indem man wiederholt durch 10 dividiert, also rückwärts geht. Dann entstehen aus der 1 nach einander $10^{-1} = 1/10$; $10^{-2} = 1/100$; …

2,52 bedeutet also nur eine andere Schreibweise für 2 + 5/10 + 2/100 oder 2 + 52/100 mit der Entsprechung 2,52€ = 2€ + 52Ct.

Dezimalen wieder als Brüche schreiben

Wenn wir also eine Kommazahl, einen Dezimalbruch also, wieder als richtigen Bruch schreiben wollen, notieren wir einfach jede Dezimale als Bruch mit dem dazu gehörigen Nenner und kürzen ihn soweit wie möglich. Die ganze Zahl vor dem Komma ist davon nicht betroffen. Einfache Umwandlungen dieser Art hatten wir bereits bei der Einführung der Dezimalbrüche durchgeführt.

6,25 hat außer den 6 Ganzen noch 2z und 5h

Oder 6 + 2/10 +5/100

Wir können 6,25 auch als 6 Ganze und 25h lesen und als gemischte Zahl schreiben und dann sogar durch 25 kürzen:

6 + 25/100 = $6\ ^{25}/_{100}$ = 6 ¼ oder $^{25}/_{4}$

Die gemischte Zahl kann auch gemieden werden mit dem direkten Weg zum gemeinen Bruch:

5,12 = $^{512}/_{100}$ kürzen durch 4: $^{128}/_{25}$ oder $5\ ^{3}/_{25}$

Das erste Verfahren ist – besonders bei größeren Zahlen – bequemer und übersichtlicher.

Aber was machen wir, wenn ein periodischer Dezimalbruch vorliegt? Dann versagt das Verfahren, weil die nicht aufhören wollenden Stellen über Tausendstel, ja Millionstel immer weiter gehen und kein Ende erreicht wird. Mit Anleihen aus der Algebra lässt sich für eine rechenfreudige 5. Klasse durchaus ein geeignetes Verfahren ableiten und im Unterricht benutzen, so Interesse und Zeit dazu vorhanden sind. Aber in der 6. Klasse ist dieses Thema besser am Platz. Es ist daher im Abschnitt „Ergänzendes“ dargestellt.

Falls dies nicht eingefügt werden kann, besteht als einfachste Lösung der Rückgriff auf die Division, welche den periodischen Dezimalbruch verursacht hatte. Falls diese Aufgabenstellung noch bekannt ist, lässt sie sich – und damit auch ihr unendlich langes Ergebnis – leicht in einen Bruch verwandeln.

Die Division 51,2 : 24 führt im Ergebnis zu dem periodischen Dezimalbruch

51,2 : 24 = 2,1333...

lässt sich aber jederzeit als gemeinen Bruch umschreiben: 51,2 : 24 = 51,2/24 mit dem Schönheitsfehler, dass im Zähler ein Dezimalbruch steht. Doch dieser lässt durch Erweitern mit 10 leicht beseitigen: 51,2/24 = 512/240 und danach sogar noch kürzen (mehrfach durch 2) und damit vereinfachen auf 32/15 oder $2^{2}/_{15}$.

Übungen

1. Wandle die folgenden Dezimalzahlen in Brüche um (0,5 = $^{5}/_{10}$ = 1/2):
   a) 0,8 b) 0,25 c)0,75 d)7,5 e) 2,68 (= $^{268}/_{100}$ = $^{87}/_{25}$)
2. Wandle die folgenden Brüche in Dezimalbrüche um:
   a) 3/2; b) 1/8 c) 15/25 d) 28/40 e) 36/16 f) 11/20
3. Wandle die folgenden Brüche in periodische Dezimalbrüche um:
   a) 10/3 b) 5/6 c) 13/39 d) 10/11 e) 24/7 f) 13/14.

Sachrechnen mit Dezimalbrüchen

Zählen und Messen: Digital und analog

Für gewöhnlich machen wir keinen Unterschied zwischen Zählen und Messen. Doch wenn man etwas sorgfältiger darauf achtet, wird dieser sehr deutlich: *Zählen* geschieht *digital*[62], so wie

[62] Digital (lat.) meint wörtlich: mit dem Finger

Kleinkinder schrittweise an ihren Fingern abzählen, also immer in ganzzahligen Schritten. Der Hirt kann damit die Größe seiner Schafherde bestimmen, angenommen zu 132 Tieren; die Angabe von Dezimalen wie 132,00 ist dabei völlig sinnlos.

Mit der ersten Einführung der Brüche konnten wir aber für die Größenbestimmung das Zählen noch auf Bruchteile ausdehnen: 1 Siebtel, 2 Siebtel, ... und damit arbeiten wie im ganzzahligen Bereich. Durch Bruchteile können wir sogar andere Zahlen im Vergleich messen: Um 1,5 oder 1½ zu erreichen, konnten wir beispielsweise 6-mal das Maß 0,25 oder ¼ benutzen. Innerhalb der reinen Zahlen können wir also jede Größe immer ganzzahlig messen, wir müssen dafür nur die passenden Bruchteile oder ein geeignetes Maß[63] zu Hilfe nehmen.

Bei realen Maßen in der Außenwelt ist das nicht so einfach. Wenn wir mit Kilogewichtstücken auf der Balkenwaage wiegen wollen, werden wir das wahre Gewicht meist verfehlen. Wir brauchen noch Bruchteile vom Kilo, zuerst 100-Gramm-Stücke, dann noch 10-Gramm-Stücke. Doch auch jetzt treffen wir nicht genau. Soweit wir auch die Teilung in kleinere Gewichtstücke fortsetzen, eine genau zutreffende Maßzahl – egal mit wie vielen Dezimalen – lässt sich nicht (digital) abzählen. Statt der Gewichte können wir aber auf die Waagschale Mehl schütten, so lange bis sich die beiden Waagschalen gleichen: Die Mehlmenge ist stetig anpassbar, bis sie dann (im Prinzip) dem gesuchten Gewicht entspricht; wir *messen analog*[64]. Dann haben wir zwar ein ebenbürtiges Gleichgewicht, aber *keine Maßzahl*.

Dezimale Maßzahlen

Da wir aber jede Maßskala fast beliebig fein unterteilen und damit die Maßzahl mit genügend vielen Dezimalen feststellen können, erreichen wir auch mit digitalem Messen jede gewünschte Genauigkeit im Rahmen der benutzten Kommastellen. Daher sind unsere Dezimalzahlen das ideale Werkzeug für alle zu bestimmenden Größenangaben.

Auf die Bedeutung die Dezimalbrüche für den Alltag, das praktische Leben und die Arbeit, für Handel, Handwerk und Industrie, wurde schon mehrfach eingegangen. Das Sachrechnen mit unseren geläufigen Maßen (Geldwert, Längen, Volumen, Gewicht, Zeit) ist fast ausschließlich nur mit Dezimalzahlen möglich. Daher bietet der freie Umgang mit dieser Zahlenart und die Anwendung aller Rechenarten darauf den wichtigsten Zugang zur umgebenden Welt, der allen Schülern zu eröffnen ist.

Genauigkeit

Inzwischen konnte bei Multiplikation und Division von Dezimalzahlen oft eine lange Folge von Nachkommastellen entstehen. Diese war zwar rein rechnerisch richtig, aber in Bezug auf die Lebenspraxis meist wenig sinnvoll. Wenn 6 Brötchen für 1,79 € angeboten werden, kann der Preis für eines davon zwar präzise berechnet werden zu 1,79 € : 3 = 0,298333... €, doch wir werden über dieses Ansinnen allenfalls lächeln und es als weltfremd bezeichnen. Andererseits werden Wechselkurse für Fremdwährungen oder Preisnotierungen für Edelmetalle mit bis zu 4 Nachkommastellen angegeben; durch große Kaufmengen wirken sich diese Stellen dann sogar auf den Gesamtpreis aus.

Die Frage nach der richtigen Anzahl der benötigten Nachkommastellen, ja der *gültigen Ziffern* überhaupt, zielt also in erster Linie auf die *mögliche oder geforderte Genauigkeit* beim jeweiligen Verwendungszweck.

---

[63] Beim Quadrat können Seitenlänge und Diagonale nicht mit demselben Maß gemessen werden, die beiden sind prinzipiell maßfremd, was natürlich beim Nachmessen mit dem cm-Lineal nicht bemerkbar ist.

[64] Analog = entsprechend, ähnlich, vergleichbar

Wie genau sind Maße?

Längenmessung als Beispiel

Genauigkeitsgrenzen können mit den Kindern gemeinsam erfahren werden. Wir lassen zum Beispiel die Größe eines Kindes bestimmen. Um möglichst genau zu arbeiten, stellt es sich vor eine Wand, an der sich eine cm-Skala befindet (Meterstab). Eine erste Ablesung wird recht ungenau sein, weil der Kopf zu weit vom Maß entfernt ist. Die Scheitelhöhe müssen wir waagrecht übertragen, am besten mit einem rechten Winkel, der von einem Buch oder Heft angezeigt wird. Die Größe wird möglichst auf 1 mm genau bestimmt und notiert.

Dann kann man das Kind auffordern, ganz locker zu stehen. Im Allgemeinen wird sich eine etwas andere Größe ergeben. Wenn sich dann das Kind ganz bewusst streckt, wird man wieder eine andere Größe erhalten. Man kann den Kindern dann berichten, dass man morgens etwas größer ist als abends und das ganz besonders für ältere Menschen gilt. Welches ist also die genaue Größe eines Menschen, wenn bei ihm 1,817m gemessen wurde? Korrekt wäre es höchstens, wenn man sagte: Er wird zwischen 1,81 m und 1,82 m groß sein.

Im Unterricht kann man auch einige Kinder nacheinander die Länge eines roh zugeschnittenen Brettes mit einem Zentimetermaß möglichst genau bestimmen lassen. Dann wird man wohl meistens mehrere unterschiedliche Ergebnisse bekommen. Das Brett hat tatsächlich an verschiedenen Stellen unterschiedliche Längen. Es wird kaum möglich sein, seine Länge auf einen mm genau zu bestimmen – nicht weil man nicht genau misst, sondern weil die Sache selbst es nicht zulässt, genauer bestimmt zu werden. Dazu kommt noch, dass Holz seine Abmessungen mit wechselnder Wärme und Feuchtigkeit verändert.

Genauigkeitsgrenzen

Würde man die Länge eines sauber rechtwinklig abgesägten Metallstabes messen, so wäre dies schon wesentlich genauer möglich. Doch erhebt sich dann die Frage, wie genau das benutzte Maß ablesbar ist und ob es überhaupt so zuverlässig ist. Bei einem normalen Meterstab sind schon die Markierungen der Skala ¼ mm dick, dazu ist für den Stab selbst eine Abweichung von ½ mm erlaubt.

Ähnlich wie beim Messen ist es beim Herstellen einer Sache: Man kann einen Balken nicht genau 6,5149 m lang machen. Holz erlaubt eine so genaue Bearbeitung nicht, auch sind schon die Änderungen durch Temperatur- und Luftfeuchtigkeitsschwankungen größer. Im Modellbau sind bei trockenen Hölzern und kleineren Abmessungen immerhin noch Genauigkeiten bis 1/10 mm möglich, die natürlich auch andere Messgeräte verlangen als den Meterstab. So könnte dann ein Fertigungsmaß von 120mm mit maximal 0,1mm Abweichung verlangt werden mit der Angabe: 120mm ± 0,1mm oder zwischen 119,9 und 120,1mm.

Welche Genauigkeit beim Herstellen eines Werkstückes notwendig oder möglich ist, hängt von seiner Verwendung, vom Material und von den Werkzeugen ab. Ein Zimmermann wird im Allgemeinen nicht auf einen mm genau arbeiten können oder müssen, von einem Möbelschreiner kann man es aber verlangen. Werden aber zum Beispiel Metallteile für einen Motor gefertigt, so können 1µm[65] (1/1000 mm) Genauigkeit nötig sein.

Sinnvolle Maßangaben

Daher gibt man für alle Maße und Größen je nach Bedarf oder Möglichkeit ein Fehlerintervall an, innerhalb dessen im Mess- wie auch den Produktionsvorgang das reale Maß liegen muss. Dies trifft auf die Genauigkeit der Teile in der handwerklichen wie industriellen Fabrikation genauso zu wie auf alle Messdaten in den angewandten Wissenschaften.

[65] 1µm (= 1 Mikrometer) = 1/1000 mm = 0,000 001 m

Wenn aber ein Maß mit einer gewissen Fehlertoleranz behaftet ist, macht es auch keinen Sinn, auf mehr Ziffern genau zu messen oder zu rechnen. Wenn beispielsweise im Bauplan eine Balkenlänge zu 6,5039 m berechnet wird, aber die Arbeits- und Messgenauigkeit eine Toleranz von ± 1cm hat, sind hier für die Längenangabe auch nur 2 Nachkommastellen sinnvoll: 6,50m ± 0,01m. Würde ein solcher Balken aber nur als Unterlage für ein Holzlager gebraucht, so könnte man seine Länge mit 6 ½ Meter angeben; der Zimmermann wüsste sofort, dass es nicht genau darauf ankommt. Das Maß 6,5m sagt mit der einen Kommastelle auch aus, dass die Abweichung unter 0,1m bleiben sollte.

Anzahl der Nachkommastellen

Vor diesem Hintergrund macht es einen Unterschied, ob man als Rechenergebnis eine Größe mit 6,5 oder 6,50 angibt: 6,5 bedeutet, dass die Größe mit der entsprechenden Einheit auf eine Dezimalstelle nach dem Komma genau bestimmt wurde. Bei 6,50 sind es 2 Dezimalstellen, die sicher stimmen (und für die entsprechende Sachaufgabe auch gebraucht würden).

Deshalb muss man sich immer gut überlegen, wie viele Stellen nach dem Komma anzugeben sind. Weil den Schülern auf vielen Gebieten noch die praktischen Erfahrungen fehlen, wird der Lehrer bei der Formulierung von Sachaufgaben auch die jeweils erforderliche Genauigkeit benennen. Natürlich hängt das auch von der verwendeten Einheit ab: Gebe ich die Länge in Metern an, so sind mehr Stellen nach dem Komma sinnvoll, als wenn ich die Länge von vornherein in Millimetern angebe.

Auf die Tatsache, dass in der stofflichen Wirklichkeit nichts im mathematischen Sinn *genau* gemessen oder hergestellt werden kann, sollte man die Kinder also auf jeden Fall hinweisen, auch wenn eine mathematisch ausgefeilte *Fehlerrechnung* – wie man sagt – erst für die 9. Klasse vorgesehen ist. Warum kann man aber sagen, dass man (genau) *vier* 2 m-Bretter brauche und nicht 3,9 oder 4,1? Die 4 ist eben als *Anzahl eine reine Zahl*, während die gebrauche Länge von 2m als *Maßzahl eine Größe* angibt.

Runden

Es ist also wichtig, für Größen eine sinnvolle Genauigkeit der Maßzahlen zu benutzen und diese mit der entsprechenden Anzahl von Kommastellen sichtbar zu machen.

Wenn die Waage an der Kasse 0,764 kg für eine Anzahl von Äpfeln angibt und der Kilo-Preis 2,99 €/kg beträgt, berechnet sich der Preis für die 0,76kg zwar mathematisch exakt zu 2,28436 €, aber auf dem Kassenausdruck steht sinnvollerweise nur die zweistellige Zahl 2,28 €. Im Umgang mit Bargeld ist eben eine Unterteilung des Euro unter $1/100\ € = 0{,}01€ = 1\ \text{Cent}$ nicht möglich. Die zweistellige Zahl 2,28€ ist der nächst liegende ganze Cent-Betrag zu 2,28436 €.

Verliert dann aber bei vielen Käufen der Handel nicht zu viel Geld? Nein, denn es wird ausgeglichen bei Kosten wie 2,28735 € bei einem anderen Kunden, dessen Apfelmenge auf der Waage 0,765kg anzeigte. In einem solchen Fall erscheint auf dem Kassenausdruck 2,29 € als nächst liegender Cent-Betrag[66]. Man spricht von *Abrunden* und *Aufrunden*. Dafür ist folgende Vereinbarung getroffen worden:

Wird ein Dezimalbruch nur näherungsweise durch Weglassen der letzten Stelle(n) angegeben, dann wird die letzte verbleibende Stelle um 1 erhöht, wenn die erste weggelassene Stelle 5 oder größer ist; ist sie kleiner als 5, dann bleibt die letzte verbleibende Stelle unverändert. Das Rechenzeichen dafür ist ein gewelltes Gleichheitszeichen:

[66] Immer häufiger wird aber im Handel „kundenfreundlich“ gerundet, also auf den nächsten Cent-Betrag darunter. Einige Läden meiden sogar die für sie lästigen 1- und 2-Cent-Beträge, indem sie die Endsumme an der Kasse immer abrunden auf 0 oder 5 Cent in der 2.Stelle.

2,28<u>436</u> ≈ 2,28 2,28<u>735</u> ≈ 2,29

(beim Runden auf 2 Kommastellen fallen die unterstrichenen Stellen weg)

Rundungsregel

Wir runden auf (und erhöhen die Vorziffer um 1), wenn die wegzulassenden Stellen mit Ziffern 5 – 9 beginnen, bei den Ziffern 0 – 4 runden wir ab.

Wichtig ist allerdings, dass ein mehrfaches Runden vermieden wird: Die Zahl 12,44<u>6</u> wird auf 2 Stellen gerundet zu 12,45; bei nochmaligem Runden ergibt sich aus 12,4<u>5</u> ≈ 12,5. Rundet man 12,4<u>46</u> dagegen sofort auf 1 Nachkommastelle, so ergibt sich korrekt: 12,4<u>46</u> ≈ 12,4: Zur ursprünglichen Zahl 12,446 liegt 12,4 auch näher als 12,5.

Aber auf keinen Fall darf die gerundete Zahl nachträglich mit einer 0 als weitere Stelle ergänzt werden; 12,4m hat eine andere Bedeutung als 12,40m.

Runden ist aber auch bei größeren Zahlen ohne Kommastellen üblich: Einem Auto um 18.598€ wird in der Zeitungsbesprechung der Kaufpreis „knapp 19 Tausend €“ zugesprochen – als übersichtliche und dennoch ausreichend zutreffende Zahl. Über die Baukosten von 532.124€ für den neuen Fußgängersteg wird mit dem Betrag von (rund) 530.000 berichtet. Hier wurde also auf volle Zehntausender gerundet und die eigentlich fehlerhaften Nullen dienen nur, um die richtige Stellenzahl zu erreichen; aus der Konvention weiß jeder, dass dies keine echt gültigen Ziffern sind. Bei großen Zahlen runden wir also nach der Maßgabe, auf wie viel gültige Stellen es ankommen soll. Fuß- und Radweg-Entfernungen werden in der Regel auf 100m Genauigkeit gerundet – aus 764m werden also 800 Meter:

764 m ≈ 800 m oder deutlicher mit der Kommaschreibweise: 0,764km ≈ 0,8km

Xxx Noch bearbeiten – Formatierung?

Übungen

1. Runde die folgenden Dezimalbrüche auf 1 Stelle nach dem Komma (mündlich oder halbschriftlich): 2,45; 2,789; 2,09; 2,409; 1,0911; 24,183; 120,777; 0,009; 43,209; 123,456; 12,3456; 1,23456; 0,123456; 3,141596; 2,09; 2,99; 2,99999.
2. Gib 3 Stellen nach dem Komma an: 2,2222; 3,3333; 4,4444; 5,5555; 6,6666; 0,123; 2,34; 3,4567; 4,56789; 9876,54321; 1,1; 2,2; 3,3.
3. An einer Tankstelle steht für den Preis eines Liters Benzin $1{,}62^{9}$ €. Ein Fahrer tankt 34,7 l Benzin. Auf dem Kassenzettel wird als Betrag 56,53 € ausgewiesen. Wurde auf- oder abgerundet?
4. 1 kg Bio-Möhren kostet 4,23 €. Wie viel ist für 1,25 kg zu bezahlen?
5. Manche Waren sind so portioniert, dass sie pro Stück oder pro feste Packung (mit gleichem Inhalt) zu bezahlen sind; andere müssen an der Kasse gewogen werden; andere sind in verschiedenen Portionen abgepackt mit angegebenem (unterschiedlichem) Preis. Suche in einem größeren Markt Beispiele für alle drei Fälle. Wie kann man bei unterschiedlichen Packungspreisen einen Preisvergleich machen? Warum gibt es diese unterschiedlichen Fälle?
6. Beim Umgang mit Bargeld rechnet man mit 2 Nachkommastellen. Wird aber zum Beispiel im Ausland, das keine Euro besitzt (z.B. in der Schweiz) mit einer Kreditkarte bezahlt, dann wird mit 5 ccc? Nachkommastellen gerechnet. Beispiel für das Tanken ccc
7. Runde die Entfernungen auf volle 100 km – einige Beispiele von Flugstrecken

Aufgaben-Reste

Der Schulflur hat einen rechteckigen Grundriss mit 2,21m x 19,75m. Er erhält einen neuen Bodenbelag aus 50 x 50 cm großen Fliesen. Am Rand muss die letzte Fliese passend geschnitten werden. Ein genügend großer Rest kann aber nochmal verwendet werden.

Mache eine Zeichnung: Nimm für jede Fliese ein 5mm-Karo und für jeden Flur-Meter 1cm.

a) Zunächst werden soweit wie möglich ganze Fliesen verlegt, bis nur noch Randstreifen frei bleiben. Wie viele ganze Fliesen werden auf den Boden kommen?

b) Wie viele Fliesen braucht man zusätzlich für die offenen Randstreifen, wenn keine Fliesen-Reste genutzt werden? Wie viele Fliesen werden insgesamt gebraucht?

c) Der Handwerker versucht aber, alle Fliesen-Reste optimal zu nutzen. Wie viele Fliesen braucht er dann insgesamt und wie viele Fliesen kann er einsparen?

d) Die Fliesen sind zu je 15 Stück verpackt. Wie viel Pakete wären nötig für die beiden Versionen b) und c)?

e) Das Paket Fliesen kostet 79,80€. Wie teuer wird der Flurbelag in den beiden Versionen b) und c)?

Lös: a) Mit ganzen Fliesen möglich: 2m x 19,5m, also 4 x 39 = 156 Fliesen

b) Reststreifen längs 39; am Ende quer 5, zusammen: + 44, insgesamt 200 Fliesen.

c) Reststreifen längs 39/2; am Ende quer 5/2, zusammen: + 22, insgesamt 178 Fliesen.

Es können 22 Fliesen eingespart werden.

d) 200 : 15 = 13,3 im Falle b) 14 Pakete; 178 : 15 = 11,86 oder 12 Pakete im Falle c).

e) Kosten im Falle b) 14 Pakete x 79,80€ = 1117,20€;

im Falle c) 12 Pakete x 79,80€ = 957,60€.

Weitere Beispiele von Dezimalen: Zeitmessung im Sport bis zu 1/1000 sec

Ergänzendes

Wöchentliche Übungsstunden

Wöchentliche Übungen zwischen den Epochen ccc – in den meisten Schulen beginnen diese in Kl.6, nur manchmal schon in 5; wegen Kopplung zu anderen Fächern auch halbierte Klasse

Vom Formenzeichnen zur Geometrie

In der 4. Klasse beginnt die Formenlehre sich in eine Fortsetzung des künstlerisch gestalteten Formenzeichnens und in eine elementare Freihandgeometrie zu gliedern. Man kann auch, wie Hermann von Baravalle schrieb, es so sehen, dass die Geometrie aus dem künstlerischen Formenzeichnen herauswächst.[67] Wie das Formenzeichnen in Flechtbandformen fortgesetzt werden kann, habe ich in dem Büchlein XXX dargestellt.[68] Neben der Schulung für ein künstlerisches Formempfinden wird damit zugleich ein dreidimensionales Vorstellungsvermögen geschult. Für einen propädeutischen Geometrieunterricht in der 4. und 5. Klasse liegt das Büchlein XXX vor.[69] In ihm beginnt durch das Ordnen, systematische Beschreiben einfacher geometrischer Formen und nicht zuletzt durch erste geometrische Konstruktionen das Aufleuchten kausalen Denkens berücksichtigt.

Individuelle Lösungswege

Für manche Schüler ist viel erreicht, wenn sie erlernte Regeln befolgen und so Aufgaben zufrieden stellend lösen können. Geistige Beweglichkeit und Kreativität werden aber geschult,

---

[67] Siehe Hermann von Baravalle, Das Hervorgehen des Wissenschaftlichen aus dem Künstlerischen, xxx?

[68] Siehe Ernst Schuberth, xxx

[69] Siehe Ernst Schuberth, xxx

wenn nicht immer eingefahrenen Verfahren gefolgt wird. Das verlangt auch vom Lehrer eine Offenheit gegenüber unkonventionellen Lösungen. Warum sollte nicht ein Schüler einen eigenen Lösungsweg finden, der ihm besonders passend erscheint? Es mag in Einzelfällen sinnvoll sein, auf dem Beherrschen und Anwenden erlernter Lösungsverfahren zu bestehen. Aber im Grundsatz verdienen eigene Lösungswege Lob wie Anerkennung und Förderung durch den Lehrer: Falls sie mit Schwächen behaftet, fehlerhaft oder völlig daneben sind, sollten sie dennoch aufgegriffen, nachgebessert, mit Tipps zur Weiterarbeit versehen und nur notfalls verworfen werden, dann aber auch mit guten Argumenten.

Man denke dabei an Carl Friedrich Gauß (*30.4.1777 Braunschweig, † 32.2.1855 Göttingen), der dort in ärmlicher sozialer Umgebung aufwuchs ohne jegliche Bildungsanreize. Dennoch fiel er als Siebenjähriger in der 1. Klasse der Volksschule sofort als blitzgescheit auf mit eigenen Gedanken- und Lösungswegen.

Sein Lehrer Büttner wollte die Kleinen für eine Zeit ruhigstellen, wohl um mit den Größeren arbeiten zu können. Er stellte daher die langwierige und auch etwas stumpfsinnige Aufgabe, alle Zahlen von 1 bis 100 schrittweise zu addieren. Nach kürzester Zeit meldete sich Gauß mit der Lösung 5050. Dem Lehrer erschien es als unmöglich, dass ein Anfänger so schnell rechnen könnte (vermutlich kannte er selbst das Ergebnis noch nicht). Auch wäre es damals völlig normal gewesen, diesen kleinen vorlauten Frechdachs wegen ungebührlichen Benehmens zu bestrafen.

Entscheidend für unsere Betrachtung ist nun die Reaktion des Lehrers: Büttner fühlte sich eben nicht gestört durch einen vorschnellen Besserwisser. Auch sagte er sich nicht, das kann nicht sein, sondern er interessierte sich dafür, ließ sich überraschen, freute sich darüber und erkannte die Begabung des Jungen. Er ließ für ihn extra ein besonderes Rechenbuch aus Hamburg schicken, damals ein sehr ungewöhnlicher Einsatz eines Lehrers, auch finanziell! Und mit dem gleichen Einsatz sorgte er für einen baldigen Wechsel von Carl aufs Gymnasium.

Als guter Pädagoge ging der Lehrer also auf den Erstklässler ein und ließ sich dessen Idee erklären. Der kleine Carl sah in Gedanken die Zahlenreihe komplett vor sich und konnte sie dabei vorwärts und rückwärts vergleichen: Vom Anfang nimmt sie immer um 1 zu, vom Ende her immer um 1 ab. Das weiß zwar jedes Kind und wundert sich auch nicht darüber. Doch Carl sah dabei die Konstanz der Summe von 1. und letzter Zahl (1 + 100) auch im weiteren Verlauf, also auch bei 2. und vorletzter Zahl (2 + 99) und so weiter, bis er nach 50 Schritten in der Mitte bei (50 + 51) ankam. Nach dieser Erkenntnis musste Gauss die stets gleichbleibende Summe 101 nur noch mit der Anzahl 50 der Schritte malnehmen zum Ergebnis 5050 (wobei auch diese Multiplikation für Erstklässler nicht üblich ist).

Viele Leser werden diese verbürgte Anekdote kennen, und doch setzt es immer wieder in Erstaunen, das schöpferische, unkonventionelle Denken dieses Kindes sich zu vergegenwärtigen. Wir werden in den meisten Fällen keinen Gauß in unserer Klasse haben, in bescheidenem Umfang hat aber jedes Kind – vielleicht im Sinne von Beuys – ein schöpferisches Potenzial in sich, das durch Lob und Anerkennung gesteigert werden kann.

Schon die einfache Summenbildung 4 + 3 + 7 + 6 - 5 + 15 kann sehr unterschiedlich vollzogen werden. Ein Kind kann beispielsweise durch geschicktes Tauschen der Summanden rechnen:

$$(4 + 6) + (3 + 7) + (15 - 5) = 10 + 10 + 10 = 30$$

Zunächst könnte man meinen, eine vom Lehrer selten positiv eingeschätzte Bequemlichkeit würde obsiegen. Doch zeigt das Kind nur auf, dass es selbst der Herrscher über die Aufgabe ist und diese sich gefügig macht.

Es ist gerade die Freude, unnötige Rechenwege zu umgehen, die dazu führt, die Rechenregeln frei anzuwenden: Ein durchaus sinnvoller Anlass, um mathematische Zusammenhänge zu entdecken. Zwar ist Bequemlichkeit keine zwingende Voraussetzung für mathematische Interessen oder Begabungen, aber genauso wenig ist ungebremster, aber vermeidbarer Rechenfleiß eine hinreichende Bedingung dafür.

Bei der Einführung und Anwendung der Grundrechenarten wurden bereits einige Beispiele für ein geschicktes Rechnen gegeben, ebenso bei der Ausnutzung von Verdopplungs- und Halbierungsreihen als Multiplikationshilfe, zur Vereinfachung bei Teilbarkeit und auf der Suche nach Kürzungsmöglichkeiten im Bruchrechnen.

Die dort behandelten Fälle mögen selten vorkommen, aber sie kommen vor – vielleicht an ganz unerwarteter Stelle. Werden Kinder in einem vielleicht ganz anderen Kontext die Möglichkeit für eine geschickte Multiplikation mit 25[70] anwenden?

Immer wieder können wir Lehrer begegnen, die durch Schülerfragen sich verunsichert fühlten, weil sie diese nicht beantworten konnten oder sich im Unterrichtfortgang gestört fühlten. Das ist verständlich, doch statt sich auch nur sachte angegriffen zu fühlen, kann man in solchen Fällen antworten: Das kann ich nicht spontan beantworten, aber es ist eine interessante Frage. Ich werde nachdenken, nachschauen oder eine Kollegen vom Fach befragen und morgen darauf eingehen. Das ist nicht ehrenrührig! Kurz: Wir sollten die Schüler als Quellort eigener Gedanken und überraschender Leistungen schätzen und bewundern lernen.

Um sich in diesem Bemühen zu bestärken, beschäftige man sich immer wieder mit Biografien außergewöhnlicher Menschen. Ein Rat, der sich schon alleine durch den Vorblick auf die künftigen Geschichtsepochen des Klassenlehrers bewährt. Hier ist aber gemeint, dass deutlich wird, wie große Leistungen biografisch entstehen, sei es in Kunst, Wissenschaft, Handwerk, Sport, einfach auf jedem Gebiet. Fast immer ist es ein Meister, Mentor oder Lehrer (nicht nur in der Schule), der eine besondere Begabung erkennt und fördert.

Ein schlechter Meister versucht, seine Schüler unter seiner Herrschaft zu behalten, indem er gezielt verhindert, dass einer ihn an Wissen oder Fähigkeiten überbieten könnte. Ein guter Meister greift dagegen stets alle Möglichkeiten seines Schülers auf und fördert sie; und seine größte Leistung erbringt er, wenn er selbst sich überflüssig macht und sein Schüler ihn am Ende übertrifft. Darauf darf er dann stolz sein und der (ehemalige) Schüler wird ihm dafür immer dankbar sein. Leonardo da Vinci fand durch seinen Meister Verrocchio[71] zu seinem malerischen Können und übertraf ihn darin. Durch Vasari wird berichtet, dass der Meister dies dadurch anerkannte, in dem er seinen eigenen Pinsel zerbrach, um fortan nur noch Leonardo malen zu lassen.

Dass es aber auch ungesunde Auswüchse gibt, zeigt manch ehrgeiziger Sport-Trainer, unter dessen Ansprüchen Eleven auch zerbrechen können. Purer Ehrgeiz ist weder beim Lehren noch beim Lernen ein gesundes Motiv. Doch im Grundsatz gilt, dass ein guter Meister seinen Lehrling über sich erheben will, sich gerne übertreffen lässt und dann neidlos dessen Fähigkeit anerkennt.

Einleit.-Text ergänzen: Lehrer soll vorhand. oder erwachendes Interesse nutzen / aufgreifen; neues Interesse wecken; dazu eignen sich auch Sonderthemen, die nicht stringent für den Unterrichtsaufbau sein müssen, aber diesen bereichern.

[70] 2 Stellen dazu fügen, 2-mal halbieren: Aus $7{,}2 \cdot 25 = ?$ führen die Schritte 7,2 – 720 – 360 – 180 zum Ergebnis $7{,}2 \cdot 25 = 180$

[71] Andrea del Verrocchio (Florenz 1435 – 1488), war als Universalkünstler außer in Malerei, Plastik und Musik auch in allen Handwerken und Ingenieurskünsten bewandert.

Mögliche Sonderthemen

Unterhaltsame Mathematik

Große Freude haben die Schüler auch daran, wenn die Rechen-Ergebnisse besondere Ziffernfolgen aufweisen und die Richtigkeit der Rechnung gewissermaßen belohnt wird[72].

Verweis o. Doppel bisherige Aufg. S.150... + 88...
(„1089“: Erklärung): Noch begründen: Rechenrätsel aus KL.5 Wiederholung Deziamlbrüche
Alle Schüler kommen zum gleichen Ergebnis 1089; die mathematische Begründung dafür ist allerdings etwas umständlich und wird daher für den Lehrer im Anhang nachgeholt

Besondere Rechensituationen, Rätsel, Scherz dazufügen
Schöne Ergebnisse (Hinweis auf S. 90 ? Baravalle, a.a.O., S.59 ff. sowie im Anhang

$11223344556667789 \cdot 9 = 101010101010101$

$111222333444555666777889 \cdot 9 = 1001001001001001001001001$

$12345679 \cdot 9 = 111\,111\,111$ $12345679 \cdot 18 = 222\,222\,222$ ohne 8 im 1.Faktor!

$0 \cdot 9 + 1 = 1$ $1 \cdot 9 + 2 = 11$ $12 \cdot 9 + 3 = 111$ $123 \cdot 9 + 4 = 1111$

$1 \cdot 8 + 1 = 9$ $12 \cdot 8 + 2 = 98$ $123 \cdot 8 + 3 = 987$ $1234 \times 8 + 4$

Max wiegt die Hälfte seines Gewichts und 20kg.
s. Literatur bei Fi

Die Neunerprobe

Bereits bei den Regeln zur Teilbarkeit wurde angemerkt, dass deren Anwendung auch im Falle ihres Nichtzutreffens hilfreiche Aussagen ermöglichen: Verneint die Regel eine Teilbarkeit, so ergab die Abweichung von ihr einen Rest. Dieser tritt dann auch bei der wirklichen – aber nur ganzzahligen – Division wieder auf. So verlangt eine aufgehende Division durch 10 vom Dividenden eine Endnull. Bei 6584 : 10 besteht eine Abweichung zur Regel um 4; dieser Rest verbleibt auch bei der Division:

$6584 : 10 = 658 \; R_{10} \; 4$[73] oder korrekter: $6584 : 10 = 658 \; {}^{4}/_{10}$

Bei Divisionen durch 2, 5 oder 10 sind diese Reste natürlich offenkundig und daher auch nicht bemerkenswert. Andere Divisoren sind jedoch aussagekräftiger und auffälliger.

Die Besonderheit ist nun, dass innerhalb der Grundrechenarten alle beteiligten Zahlen ihre Eigenart bezüglich der Teilbarkeitsregel auf das Ergebnis übertragen. Auf diesem Prinzip beruht die Neunerprobe, die an einem ersten Beispiel gezeigt werden soll:

Bei der einfachen Addition $425 + 391 = ?$

suchen wir bei beiden Summanden mittels der Quersumme die Neunerreste auf:

425 ergibt die Quersumme $Q = 4 + 2 + 5 = 11$ oder als Folgequersumme $Q = 1 + 1 = 2$; daher hätte 425 bei der Division durch 9 den Rest 2.

391 mit der Quersumme 13 oder $Q = 4$ hat den 9er-Rest 4.

Die Summe $425 + 391 = 816$ hat mit $8 + 1 + 6$ die Quersumme 15 oder $Q = 1 + 5 = 6$ als zugehöriger 9er-Rest. Die 9er-Reste der beiden Summanden $(2 + 4)$ addieren sich dazu passend zum selben Rest 6.

[72] Anregungen dazu (wenn auch ohne Komma) entwickelten beispielsweise H.v.Baravalle, a.a.O., S.59 ff. und M. Keller: „Rechnen muss Spaß machen“ (in H. Neuffer: „Zum Unterricht des Klassenlehrers an der Waldorfschule“, Stgt. 1997, S. 364ff.)

[73] Für die Darstellung des Restes wird hier die bereits eingeführte Form $658 \; R_{10} \; 4$ (mit dem Hinweis auf den Teiler im Index) benutzt.

Wäre nun bei der Addition 425 + 391 ein Rechenfehler aufgetreten, etwa durch Versäumen des Übertrags von der Zehnerstelle auf die Hunderter mit dem fehlerhaften Ergebnis 716 so würde nun der 9er-Rest nur 5 betragen (Quersumme 7 + 1 + 6 = 14 und folgend 1 + 4 = 5). Er würde damit den 9er-Reste der beiden Summanden widersprechen und damit einen Rechenfehler anzeigen.
Auf gleiche Weise lässt sich die Subtraktion mit den 9er-Resten begleiten:

	Summanden	Summe
Rechnung	7244 – 4281	= 2963
1.Quersumme	17 15	20
2.Quersumme	8 6	2
Vergleich der 9er-Reste	8 – 6	= 2

Ähnlich geht es bei der Multiplikation:

	Faktoren	Produkt
Rechnung	564 × 31	= 17484
1.Quersumme	15 4	24
2.Quersumme	6 4	6
9er-Reste	6 × 4 = 24	6
Bereinigter 9er-Rest	6	= 6

Im Prinzip lässt sich die 9er-Probe auch auf die Division übertragen, jedoch ohne großen Nutzen. Wenn nämlich eine ganzzahlig aufgehende Division durch einen Rechenfehler gestört wird, wird auch die Ganzzahligkeit des Quotienten verletzt und damit der Fehler offenkundig. Es lohnt sich eigentlich nicht. Dennoch ist die 9er-Probe möglich, am einfachsten aber rückwärts:

Die Division 12972 : 23 wurde durchgeführt bis zum Ergebnis 564 und soll geprüft werden. Mit dem Ergebnis kann sie als Multiplikation umgeschrieben werden (ohne als „Probe“ wirklich zu multiplizieren):

Rechnung	12972 =	23 ×	564	
1.Quersumme	21	5	15	
2.Quersumme	3	5	6	
9er-Reste	3	5 × 6	=	30
Bereinigter 9er-Rest	3		=	3

Ob die 9er-Probe wirklich im Unterricht der 5. Klasse Platz findet, ist schon allein aus zeitlichen Gründen fraglich. Sie stellt eher eine zahlentheoretisch interessante Besonderheit dar, die als eigenständiges Thema zwischendurch eingeschaltet werden kann. Für die alltäglichen Rechenaufgaben ist sie eher beschwerlich, vor allem aber nicht eindeutig sicher: Trifft sie nicht zu, so liegt garantiert ein Rechenfehler vor; trifft sie zu, so ist die Rechnung nur wahrscheinlich (zu 90%) richtig, aber nicht garantiert!

Dieselben Möglichkeiten bietet die Elferprobe mit genau dem gleichen Arbeitsprinzip. Allerdings lässt sie sich nicht genauso leicht anwenden, weil der 9er-Rest eben doch viel einfacher zu bestimmen ist, als der 11-Rest.

Das Sieb des Eratosthenes

Bereits in der Einführung zu den Zahlenverwandtschaften war der Zahlenstrahl als Wandbild im Klassenzimmer vorgeschlagen. Wurde dieser mit Hinweiskärtchen für die enthaltenen Teiler versehen, fielen die Primzahlen sofort als alleine gebliebene Fremdlinge auf. Der Rhythmus der 1×1-Reihen ließ auch eine erste Systematik erkennen. Auch konnte auffallen, dass sich alle

Primzahlen (außer 2 und 3) direkt vor oder nach einer 6er-Zahl befinden. Mit dieser Erinnerung ist die Weiterführung zum Primzahlensieb des Eratosthenes[74] naheliegend und auch gut verständlich.

Die Folge der natürlichen Zahlen wird in ein regelmäßiges Raster eingeordnet. Am einfachsten zu schreiben sind natürlich 10er-Zeilen, weil jede Zahl leicht einzuordnen ist nach Spalten (Einer) und Zeilen (gemäß den Zehnern); doch ist jeder andere Zeilenwechsel ebenso möglich, er muss nur regelmäßig gleichbleibend sein.

Aber für die Primzahlsuche sind 12er-Zeilen viel günstiger, weil etliche Spalten automatisch komplett entfallen. Diese soll deshalb hier gewählt werden mit der 1. Zeile von 1 bis 12, der 2. Von 13 bis 24 und so fort.

Zunächst streichen wir in 1. Zeile alle zusammengesetzten Zahlen (4, 6, 8, 9, 10, 12). Dadurch bleiben nur noch die Primzahlen 2, 3, 5, 7, und 11 (die beginnende 1 lassen wir mit ihrer Sonderstellung auch dabei) übrig: Sie blieben im Sieb hängen. Genauso müssten wir nun alle Folgezeilen bearbeiten, doch es zeigt sich rasch, dass wir einen großen Teil der Zahlen schon im Voraus ausscheiden können: Die Spalte unter der 2 enthält nur gerade Zahlen, diese entfallen komplett, ebenso unter 4, 6, 8, 10 und 12. Unter 3 und 9 enthalten die Spalten 3er-Zahlen, auch diese fallen bei unserer Primzahlsuche durch das Sieb. Diese Vereinfachung ist in der Tabelle bereits durch kleinere Kursiv-Ziffern kenntlich gemacht:

(1)	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~	11	~~12~~
13	*14*	*15*	*16*	17	*18*	19	*20*	*21*	*22*	23	*24*
25	*26*	*27*	*28*	29	*30*	31	*32*	*33*	*34*	35	*36*
37	*38*	*39*	*40*	41	*42*	43	*44*	*45*	*46*	47	*48*
49	*50*	*51*	*52*	53	*54*	55	*56*	*57*	*58*	59	*60*
61	*62*	*63*	*64*	65	*66*	67	*68*	*69*	*70*	71	*72*
73	*74*	*75*	*76*	77	*78*	79	*80*	*81*	*82*	83	*84*
85	*86*	*87*	*88*	89	*90*	91	*92*	*93*	*94*	95	*96*

Deutlich ist nun zu sehen, dass alle nachfolgenden Primzahlen nur noch in den Spalten vor und nach 6 und 12 sein können. Für die Darstellung an der Tafel und im Heft werden diese Spalten farbig gekennzeichnet. Ist jeder Nachbar einer 6er-Zahl dann auch Primzahl? Nein, denn in den fraglichen Spalten kommen schon mit 25, 35, 49 Zusammensetzungen mit den Faktoren 5 oder 7 vor.

Zunächst scheint es, dass diese Zahlen unregelmäßig zu finden sind. Doch wenn man alle 5er-Zahlen ausstreicht (auch in den bereits ausgeschiedenen Spalten), entdeckt man ein bestimmtes Muster in der Tabelle, ebenso bei den 7er-Zahlen: Die 5er (beginnend mit 5 und 10) rutschen von Zeile zu Zeile um 2 Spalten nach rechts, die 7er um 2 nach links; so können sie leicht ausgesiebt werden. Außer der verursachenden 5 selbst sind deren Folgezahlen mit der Einfärbung ihrer Felder gekennzeichnet. Die 7er-Reihe lohnt sich eigentlich kaum mehr, außer 49 und 77 sind bereits alle schon von anderen Teilern getroffen worden. Der Vollständigkeit halber sind diese Zahlen durch fallende Schrägstriche markiert, um die konsequente Regelmäßigkeit zu zeigen:

(1)	2	3	~~4~~	5	~~6~~	**7**	~~8~~	~~9~~	~~10~~	11	~~12~~

[74] Eratosthenes (275-195 v.C.) war Leiter der weltgrößten Bibliothek in Alexandria. Sein als mathematisches Genie bewies er neben seinem Primzahlsieb noch mit dem Beleg der Erdkrümmung, er errechnete sogar aus 2 einfachen Winkelmessungen des Sonnenschatten den Erdumfang mit erstaunlicher Genauigkeit.

13	~~*14*~~	*15*	*16*	17	*18*	19	*20*	~~*21*~~	*22*	23	*24*
25	*26*	*27*	~~*28*~~	29	*30*	31	*32*	*33*	*34*	~~35~~	*36*
37	*38*	*39*	*40*	41	~~*42*~~	43	*44*	*45*	*46*	47	*48*
~~49~~	*50*	*51*	*52*	53	*54*	55	~~*56*~~	*57*	*58*	59	*60*
61	*62*	~~*63*~~	*64*	65	*66*	67	*68*	*69*	~~*70*~~	71	*72*
73	*74*	*75*	*76*	~~77~~	*78*	79	*80*	*81*	*82*	83	~~*84*~~
85	*86*	*87*	*88*	89	*90*	~~91~~	*92*	*93*	*94*	95	*96*
97	~~*98*~~	*99*	*100*	101	*102*	103	*104*	~~*105*~~	*106*	107	*108*

Je weiter man die Tabelle zu größeren Zahlen hin ausdehnt, umso mehr Primzahlreihen muss man ausstreichen. Bis 100 genügen aber die Reihen bis 7 vollkommen, weil alle Vielfachen von höheren Primzahlen (wie 11, 13, 17, ...) bereits getroffen wurden. Erst die 121 würde danach noch nicht erwischt, dazu würde die 11er-Reihe benötigt. Generell gilt, dass im Sieb alle Primzahlen verbleiben, die unterhalb des Quadrats der ersten nicht mehr geprüften Primzahl liegen. Wurde also bis hin zur 13er-Reihe gestrichen, so wird erst $17^2 = 289$ nicht mehr erkannt als auszuscheidende Zahl.

Bereinigt man nun unsere deutlich kürzere Tabelle von den durchgefallenen Zahlen, so verbleiben nur noch die Primzahlen. An der Tafel können diese mit einem roten Kreis umrahmt werden, damit sie auffallen.

(1)	2	3		5		7				11	
13				17		19				23	
				29		31					
37				41		43				47	
				53						59	
61						67				71	
73						79				83	
				89							
97				101		103				107	

Dann betrachten wir ihre Anordnung: Es lässt sich keine vorhersagebare Regel erkennen, außer dass sie nur in den Spalten vor und nach 6 oder 12 vorkommen, aber die Lücken darin sind ohne System. Selbst ihre Häufigkeit innerhalb der Zeilen ist regellos: In der Zeile von 85 bis 94 findet sich nur 1 Primzahl, in der Folgezeile aber wieder 4. Das erschwert generell die Suche nach Primzahlen: Selbst Rechenprogramme dazu sind bei großen Zahlen umfangreich und zeitaufwendig, doch die bereits gefundenen Primzahlen werden unter Mathematikern in Tabellenform ausgetauscht.

Übergang und Vorblick: Auf dem Weg zur 6. Klasse

In einer einigermaßen altershomogenen Schülerschaft sind alle gegen Ende der 5. Klasse in ihr 12. Lebensjahr eingetreten oder haben es gar schon vollendet. Schon längst hat sich für den Klassenlehrer in unzähligen Situationen gezeigt, dass die bisher so harmonische Zusammenarbeit nicht mehr selbstverständlich ist. Hat man den Eintritt in diese mittlere Zeit mit der Überwindung des Rubikon charakterisiert, so könnte der Umbruch am Ende dieser Entwicklungsperiode als zweiter Rubikon bezeichnet werden.[75]

Ein neues Selbstbewusstsein entsteht und die Außenwelt wird wacher als Gegensatz zum eigenen Innenerleben, aber auch in ihrer Beziehung zum Menschen erfasst. Hatten wir die Klassen 4 und 5 den *mittleren Bereich* genannt, so erreichen die Schüler mit der 6. Klasse den *oberen Bereich* der Klassenlehrerzeit. Mit dieser Gliederung des 2. Jahrsiebts sind vor allem Stufen der Bewusstseinsentwicklung des Kindes gemeint, welchen der Unterricht nach Inhalt und Methode folgen kann. Für den Lehrer bedeutet es, selber in die Stufen des Bewusstseins dieses Alters einzutauchen.

Man muss lernen, aus vollem Bewusstsein bildhaft zu sprechen und nicht nur ein Kopf- sondern auch ein Gefühlsverständnis für die behandelten Inhalte zu entwickeln. Ob der Lehrer es will oder nicht will – die Kinder verstehen das Dargebotene immer mit einem starken Gefühlsanteil. Erinnerungen an die eigene Kindheit können das vielleicht verständlich machen. Eingangs wurde bereits die *Gefühls- und Gemütserziehung* als Hauptaufgabe genannt.

Für die Methodik wurde daraus die pädagogische Wirkung des bildhaften Unterrichtens begründet. Innerhalb des Mathematik-Unterrichtes der 5.Klasse wurde mit den verschiedenen Zugängen zu Verhältnissen, verbunden mit Motiven wie Zahlenverwandtschaft, Rhythmus, Gleichklang und ähnlichem die Empfindung für Zusammenhang und Ordnung gestärkt wie geklärt und eine entsprechende Grundlage geschaffen.

Wenn in der Geschichte der 7. Klasse beispielsweise der Beginn der Neuzeit anhand von Einzelbiografien und persönlicher Leistungen geschildert wird, steht jeder dieser Erfinder, Entdecker, Wissenschaftler, Künstler oder Staatsmänner exemplarisch als stellvertretendes Bild für ihre Zeit, von der sie geprägt waren und die sie selbst mit gestalteten. Voraussetzungen und Folgen ihres jeweiligen Denkens und Handelns werden im Lebensbild miteinander verbunden und aufeinander bezogen. So werden Ursache und Wirkung nicht nur als linear-logische Abfolge und Verknüpfung entdeckt, sondern in ein sinnvolles Verständnis von Zusammenhängen eingebettet.

Die ersten großen Schritte zu dieser anderen Weltbegegnung ermöglichen in der 6. Klasse die neu einsetzenden Naturwissenschaften (Geologie, Astronomie, Physik). Sie werden unterstützt in der konstruierenden Geometrie und auf freiere Weise von der Schattenlehre im Schwarz-Weiß-Zeichnen. Der *Bildzusammenhang bildet Zusammenhänge im Denken* bis hin zu ersten echten Beweisen, welche den sichtlichen Zusammenhang denkerisch gliedern und nachvollziehen.

Die Schüler wollen sich stärker vom Lehrer abgrenzen und ihre eigene Urteilsfähigkeit unter Beweis stellen. Das macht das Unterrichten zwar nicht einfacher, kann aber auch begeistern, wenn der Lehrer diesem Grundbedürfnis der Schüler entgegen kommt und das deutliche Verlangen nach Begründungen und gedanklicher Auseinandersetzung aufgreift, oder wenn möglich es sogar gezielt einsetzt.

Eine wichtige Tugend für den Lehrer ist die Freude an diesem Reifeprozess, der deutlich eine Loslösung und wachsende Selbstständigkeit bringt. Das Märchen *Der getreue Johannes* schildert bildhaft, welches Verhältnis zum jüngeren Menschen gefordert ist. Verzicht zu Gunsten des Jüngeren bedeutet aber auch einen eigenen Entwicklungsschritt. Ihn sollte man nicht scheuen.

In der 6. Klasse können elementare Algebra und eine erste Wirtschaftskunde den Entwicklungsbedingungen sehr gut entsprechen. Mit den Vorstufen der Algebra wird ein reines Denken in Begriffen veranlagt, in der Wirtschaftskunde ein tieferes Verständnis für die soziale

[75] Wiedemann / Koepke, Mitte der Kindheit xxx? Vorsicht – vgl. Einleit. Kl.5

Umwelt erworben. Beides gehört zusammen, weil jeder Bewusstseinsfortschritt auch das soziale Leben neu sehen lässt. Die im Lehrplan vorgesehene Prozent- und Zinsrechnung, die im Dreisatz sich spiegelnde Verhältnismäßigkeit und vieles andere mehr stellen einerseits die Verbindung zum sozialen Leben her, befreien andererseits auch das Denken von der engen Bindung an Gegenständliches, und erlauben dennoch vielfache Bezüge zu konkreten Anwendungen.

Themen aus der 6.Klasse

Je nach Lernfortschritt der Klasse können Themen der 6.Klasse prinzipiell auch am Ende der 5. Klasse aufgenommen werden. Falls diese Möglichkeit besteht kann aus nachfolgenden Bereichen Passendes ausgewählt werden. Selbst wenn dies nicht möglich ist, bieten sie dem Lehrer wertvolle Hinweise darauf, welche Ziele sein 5.Klass-Unterricht vor sich haben soll.

Verhältnisse und Proportionen

Die unterschiedlichen Divisionsformen

Seit der ersten Klasse haben wir die beiden *Umkehrungen der Multiplikation* als das V*erhältnisbilden* oder *Messen* und das *Dividieren* oder *Teilen* unterschieden – nicht zuletzt in der Berücksichtigung der Temperamente beim Rechnen. Hier soll noch einmal in aller Kürze daran erinnerst werden, weil es neben seiner Bedeutung im Bruchrechnen auch zu den Zahlenbeziehungen und ihren gegenseitigen Verhältnissen führt. Um den Unterschied leichter zu erkennen, verwenden wir Längen als Größen:

Drei 4 m-Balken haben insgesamt die Länge 12 m: $3 \times 4\text{m} = 12\text{m}$. Die beiden möglichen Umkehrungen führen im ersten Fall zum *Enthaltensein* 12m : 4m = 3(-mal) oder im zweiten Fall zum *Teilstück* 12m : 3 = 4m. Zum einen erhalten wir die unbenannte (reine) Zahl 3, zum anderen sind wir von der Größe 12m ausgegangen und erhalten wiederum eine gleichartige Größe in den 4m.

Die erste Operation *vergleicht*:

Die 12m werden mit der Länge 4m *gemessen*. 4m sind in 12m dreimal enthalten oder auch 12m ist dreimal größer als 4m. Dies ist ein *multiplikativer Vergleich*, den wir bereits bei der Einleitung zur 5.Klasse angestellt hatten. Er weist darauf hin, wie sich die beiden Größen zueinander verhalten: 12m *verhält* sich zu 4m wie 3 : 1.

Die zweite Operation *dividiert*:

Wenn eine Länge von 12 m in 3 gleiche Teile *aufgeteilt* wird, hat jedes Teil die Länge 4 m; als Rechnung geschrieben: 12 m : 3 = 4m oder $^{12\text{m}}/_{3} = 4\text{m}$ oder auch: Wenn zwölf 1 m-Stücke an drei Empfänger *verteilt* werden, bekommt jeder vier Meterstücke.

Verhältnisse und Brüche

Die mathematische Schreibweise benutzt für das *Verhältnis* als Darstellung den Doppelpunkt. Wir sagen „12m *verhält* sich zu 4m wie 3 zu 1“ und schreiben 12m : 4m = 3 : 1.

Wenn wir nicht an benannte Größen denken, sondern im Bereich der reinen Zahlen bleiben, verschwindet formal der Unterschied zwischen Verhältnisbilden und Dividieren. Im Hinblick auf höhere Gebiete der Mathematik und auf ein realitätsbezogenes Denken ist es dennoch wichtig, die beiden Sachverhalte nicht zu verwischen. Wir stellen die formale Übereinstimmung also nicht als selbstverständlich dar. Dennoch können wir sie aber bei gewöhnlichen Zahlen benutzen und daher das *Verhältnis* 3 : 4 und den *Bruch* (als Größe) $^3/_4$ formal gleich behandeln und damit je nach Sachverhalt den Divisionsdoppelpunkt „ : “ oder den Bruchstrich verwenden.

Dementsprechend können wir auch einen Bruch als unterschiedliche Aufgabenstellung formulieren.

6/2 = 3 kann bedeuten:

a) Wie viel ist 6 durch 2? 6 *geteilt* durch 2 ist 3

b) Wie viel sind 6 halbe Stücke? 6/2 *gekürzt* sind 3 („ganze“ Stücke)

c) Wir *messen* die 6 durch die 2, wir benötigen *3-mal* die 2, um 6 zu erhalten

d) Wie *verhalten* sich die beiden Zahlen zueinander? 6 : 2 = 3 : 1 oder als Bruch 6/2 = 3/1.

Geteilt-Punkte und Bruchstriche werden wir künftig als zwei mögliche Schreibweisen gleichwertig benutzen. An diesen noch ungewohnten Austausch der beiden Schreibweisen führen wir die Schüler durch wiederkehrendes Benutzen heran. Dabei bedenken wir, dass die Bruchschreibweise Rechenvorteile (unter anderem enthält sie Hinweise zum Kürzen) bietet und für die Algebra gebräuchlicher ist und deswegen in den oberen Klassen bevorzugt wird. Zu beachten ist auch, dass ein Bruchstrich wie eine Klammer wirkt und deshalb bei seiner Verwendung immer wieder Klammern wegfallen können.

Proportionen

Das Rechnen mit Proportionen wird im Rahmen der Gleichungslehre vor allem in der 7. und 8. Klasse gepflegt. Da aber im Umgang mit Brüchen immer wieder auch Verhältnisse in Betracht kommen, ist es ratsam, ihre Bedeutung an einfachen Beispielen erfahren zu lassen.

Eine *Proportion* wird dadurch gebildet, dass *zwei Verhältnisse* einander gleich gesetzt werden können. Bei gleichen Formen unterschiedlich großer Figuren stehen einander entsprechende Längen immer im gleichen Verhältnis und entsprechende Verhältnisse bilden die Proportionen. *Form* ist unabhängig von ihrer Größe durch Verhältnisse bestimmt.

Wenn wir zwei Rechtecke betrachten, das eine (A) mit der Länge 9cm und der Breite 6cm, das andere (B) mit den Maßen 12cm und 8cm, sehen wir sofort in beiden die gleiche Form, wenn auch in unterschiedlicher Größe. Die Überprüfung erfolgt über das Seitenverhältnis von jeweiliger Breite und Länge: Bei A beträgt es 9cm : 6cm und bei B sind es 12cm : 8cm. Die Gleichheit der beiden Verhältnisse lässt sich durch Division bestimmen, in beiden Fällen wird übereinstimmend der Zahlenwert 1,5 erreicht. Zu Recht dürfen wir hier also die Proportion 9cm : 6cm = 12cm : 8cm aufstellen.

Die beiden Verhältnisse sind über einen Faktor gekoppelt, der zwischen ihnen vermittelt. Dieser ist in obigem Beispiel nicht sofort zu erkennen. Wir machen einen Zwischenschritt und gehen *indirekt* vor, indem erst mit 4 multiplizieren:

9cm : 6cm = 36cm : 24cm

und danach mit 1/3:

36cm : 24cm = 12cm : 8cm

Diese beiden Schritte entsprechen dem Erweitern (mit 4) und anschließendem Kürzen (durch 3) der Proportion. Wenn wir – wie einleitend angemerkt – einen Bruch als Verhältnis auffassen, erreichen wir die gewohnte Darstellung des Erweitern und Kürzens:

$$\frac{9\text{cm}}{6\text{cm}} = \frac{36\text{cm}}{24\text{cm}} = \frac{12\text{cm}}{8\text{cm}}$$

Im Alltag rechnen wir, meist ohne es besonders zu bemerken, andauernd mit Proportionen und betrachten dies als selbstverständlich. Wir erwarten gleichbleibende Verhältnisse zwischen dem Preis und der Warenmenge, zwischen Fahrstrecke und Fahrzeit, zwischen dem Gewicht und der Stückzahl und so weiter. Ist dabei die Gleichheit über die Proportion verletzt, so reden wir von unverhältnismäßig oder – etwa bei ungünstig angewachsenen Preisen – von überproportional.

Proportionen als Weltbezug

Der Umgang mit Proportionen ist vor allem im Bereich der Anwendungen aber auch der künstlerischen Gestaltung von grundlegender Bedeutung. Darüber hinaus spielen sie in geometrischen Beweisen und im Auffinden gesetzmäßiger Beziehungen oft eine wichtige Rolle.

Aufgrund von Proportionen erkennen wir Menschen wieder, werden durch die harmonischen Proportionen einer Kathedrale berührt, empfinden musikalische Rhythmen durch die auftretenden Zeitverhältnisse usw. Bei Reisen in ein anderes Währungsgebiet ist das Abschätzen von Preisen aus einem gut entwickelten Gefühl für Proportionen oft eine große Hilfe.

In der Behandlung der Proportionen benötigen wir im einfachsten Fall noch keine Umformung von Gleichungen. Auf jeden Fall ist es wertvoll, das Rechnen mit Verhältnissen und Proportionen an praktischen Beispielen zu üben und dabei auch das Einschätzen wieder zu pflegen. Das Denken begegnet damit den Verhältnissen in der Welt und setzt sich selbst in ein eigenständiges Verhältnis zur Welt.

Der Zweisatz

Für die 5. Klasse eignen sich natürlich Proportionen besonders gut, wenn sie die beiden Verhältnisse *direkt* über einen Vervielfacher verbinden, was in folgenden Beispielen deutlich wird:

1) a) Ein Wanderer macht auf 100 m etwa 150 Schritte.

Wie viele Schritte macht er etwa auf 1 km?

b) Ein Kind, das mitwandert, macht auf 100 m etwa 250 Schritte. Wie viele Schritte braucht es etwa für die gleiche Strecke?

c) Wie viele Schritte machen die Vorderbeine eines Hundes, der auf 100 m 300 Schritte macht?

2) Für 2,5 kg Bio-Weizenmehl wurden 2,50 € bezahlt Euro bezahlt. Wie viel kosten dann 10 kg der gleichen Sorte?

3) Eine Familie brüht ihren der Kaffee noch traditionell auf und verwendet für 3 Personen 5 gehäufte Teelöffel gemahlenen Kaffee. Wie viel Teelöffel Kaffee sind zu nehmen, wenn bei einer Geburtstagsfeier 6 Personen Kaffee trinken wollen?

Rechnungen dieser Art bezeichnet man als *Zweisatz*. Man stellt darin eine Proportion auf, in der das gleichbleibende Verhältnis zwischen zwei Mengen gleich dem Verhältnis zwischen zwei anderen Größen ist. Indem man die Verhältnisse – wie Brüche – entsprechend erweitert, bekommt man die gesuchte Zahl.

Führen wir dies an den Beispielen durch, so erhalten wir bei der Aufgabe

1a) die Lösung:

1 km = 1000 m ist das 10fache von 100 m. Also wird der Wanderer auch die 10fache Zahl von Schritten benötigen. Das sind 1500 Schritte.

Von großer Wichtigkeit ist, von Anfang an die Lösungsschritte in klarer Anordnung aufzuschreiben. Dies kann zum Beispiel in einer Tabelle geschehen, die handschriftlich mit wenigen Strichen angedeutet werden kann. Für viele Kinder ist diese klare Strukturierung eine große Hilfe und sollte nicht als Nebensache betrachtet werden.

	Strecke		Schrittzahl	
× 10	100 m	Entsprechen	150 Schritte	×10
	1 km = 1000 m	Entsprechen	1500 Schritten	

In der 1. Zeile wird notiert, um welche Größen es sich handelt – hier Strecke und Schrittzahl. Dann werden in der 2. Zeile die gegebenen Werte eingegeben – hier 100 m und 150 Schritte. In die 3. Zeile kommt unter die 100 m die neue Strecke 1 km = 1000 m. Nun suchen wir den Vervielfacher. Das ist die *Verhältniszahl* 1000 m : 100 m = 10 (nicht 10 m!). Mit diesem Vervielfacher multiplizieren wir.

Der Dreisatz

Weg über die Einheit indirekt

Schlussrechnen / Der Dreisatz
Verfahren, Beispiele, Übungen
Anwendung von Verhältnis-Mäßigkeit
Mit Kapitel Proportionen koppeln oder erst danach anfügen
In Anhang? / Sinnvolle Übertragung des Dreisatzes Verweis auf Gleichungen

Umgekehrte Proportionen

Mit Beispielen das Problem schildern: Arbeitszeit kürzer bei mehr Arbeitern, Fahrtzeit kürzer bei größerer Geschwindigkeit usw.
nur Hinweis, dass dies in oder nach Kl.6 kommt?

Prozentrechnung

Weil sich die Prozentrechnung unmittelbar an das Rechnen mit Dezimalzahlen anschließen lässt, sind einfache Aufgaben daraus schon am Ende einer 5. Klasse machbar – es ist kaum eine Frage des Schwierigkeitsgrades, eher der noch verfügbaren Zeit. Der echte rechnerische Umgang damit und auch die Ausweitung auf Promillerechnung werden jedoch der 6. Klasse vorbehalten sein. Dort besteht auch im Rahmen einer ersten Wirtschaftskunde ein großes Anwendungsgebiet.

Je Hundert

Ein erster Schritt kann erfolgen, in dem man auf das bekannte Auslosen mit einer Münze verweist: „Kopf oder Zahl?“ So heißt der Ruf, wenn zwischen zwei Mannschaften oder sonstigen Kontrahenten neutral und im Empfinden der Beteiligten gerecht entschieden werden soll, wem ein gewisser Vorteil, zu Beispiel anfangen zu dürfen, zugesprochen werden soll. Die Chance, den günstigen Fall zu bekommen, nennen die Schüler selbst „zu gleichen Teilen“ oder „50-50“ oder neudeutsch „fifty-fifty“. Meistens ist auch die Übertragung auf „50-prozentige Chance“ geläufig, ebenso die Bezeichnung „100-prozentig“ für eine sichere Sache.

Damit ist bereits erkannt, dass 100% für die volle Sache gemeint sind und 50% für die Hälfte. Schreibt man diesen Sachverhalt mit Dezimalzahlen, ergibt sich bereits ein erster Zusammenhang:

1 = 1,00 ≙ 100%
½ = 0,50 ≙ 50%

Die Bedeutung des Wortes[76] erschließt dann den nächsten Schritt: „Pro Hundert“ oder „Je 100“. Dann bedeuten 50% also 50 pro 100 oder 50 je 100, womit an das Bruchrechnen angeschlossen werden kann:

[76] Seit der Umstellung unserer Währung auf Euro und Cent ist letzteres Wort für 100 geläufig, auch der Hinweis auf französisch oder italienisch für das Zahlwort 100 ist hilfreich. Der Zentner hat mit 10 nichts zu tun, sondern weist mit seinem „Zent“ auf 100 Pfund hin, die er enthält. Entsprechend ist Mille (nicht millione, der „große tausender“!) als Zahlwort 1000 die Begründung für 1/1000 als 1 pro Tausend oder 1 Pro Mille.

50% $\triangleq \frac{50}{100}$ = 0,50 = ½

Einfache Prozentsätze

Die Zahlenform 50% nennen wir den *Prozentsatz*, seine Ziffernfolge tritt in der dazu gehörigen Dezimalzahl wieder auf. In der 5. Klasse sind nun fürs Kopfrechnen einfache Prozentsätze möglich:

50% von 1€ oder $\frac{50}{100}$ von 1€ oder ½ von 1€ oder 0,50€

Entsprechend

50% von 30€ oder $\frac{50}{100}$ von 30€ oder ½ von 30€ oder 15€

Damit können wir von allen Zahlen den Anteil von 50% bestimmen.

Wenn wir die 50% halbieren, kommen wir zu 25% und damit auf den Anteil von nur noch ¼. Wenn wir von 100% den 10ten Teil nehmen erhalten wir 10% als $^{1}/_{10}$. 20% sind davon das Doppelte und daher auch leicht zu bestimmen. Und genauso leicht können wir 1% berechnen, wenn wir 1/100 nehmen oder einfach um 2 Stellen schieben:

1% von 250€ sind 2,50€

Auf diese Weise können mündlich mit halbieren, zehnteln, verdoppeln auf vielfältige Weise Prozentsätze angewandt und geübt werden als brauchbarer Vorlauf für das echte Prozentrechnen in der 6. Klasse:

Halbieren	50% von 400€	sind	200€
Nochmals halbieren	25% von 400€	sind	100€
1/10	10% von 400€	sind	40€
Davon das Doppelte	20% von 400€	sind	80€
1/100 (oder 1/10 v.10%)	1% von 400€	sind	4€
Davon das Doppelte	2% von 400€	sind	8€
Hälfte von 10%	5% von 400€	sind	20€

Mit der Erinnerung an die „Teil von“-Beziehung erkennen wir sogar einen einfachen Rechenweg für beliebige Prozentsätze:

Statt ¼ von 400€ hatten wir geschrieben:

¼ · 400€ = 100€ oder mit Dezimalzahl: 0,25 · 400€ = 100€

Damit können wir 25% von 400€ mit einer normalen Multiplikation berechnen. Genauso würde es mit jedem anderen Prozentsatz gehen:

20% von 400€ sind $^{20}/_{100}$ von 400 oder $^{20}/_{100}$ · 400€ oder dezimal: 0,20 · 400€ = 80€

Es geht aber auch mit der Bruchmultiplikation: $^{20}/_{100} \cdot 400€ = \frac{20 \cdot 400}{100}$ €

Nach kürzen durch 100 verbleibt noch zu rechnen: 20 · 4 € = 80€

An dieser Stelle müssten die geläufigen Begriffe eingeführt werden:

Grundwert und Prozentwert

Die ganzen 400€ stellen die Gesamtmenge dar, diese wird *Grundwert* genannt; er entspricht auch den vollen 100%. Der *Prozentsatz* 20% sagt uns, welchen *Bruchteil* wir davon nehmen sollen. Das Ergebnis 80€ ist das berechnete *Teilstück* und heißt *Prozentwert*; diesem entspricht der Prozentsatz von 20%. *Grundwert und Prozentwert sind zwei Größen mit gleicher Maßbezeichnungen.*

Jeder Prozentsatz von jedem beliebigen Grundwert ist nun berechenbar:

40% von 35kg sind $^{40}/_{100}$ von 35kg oder $^{40}/_{100}$ · 35kg oder dezimal: 0,40 · 35kg = 14kg oder mit Bruchmultiplikation: $^{40}/_{100} \cdot 35\text{kg} \ = \ \frac{40 \cdot 35}{100}\text{ kg}$

oder nach Kürzen durch 2·5 $\ = \ \frac{20 \cdot 7}{10}\text{ kg} \ = 2 \cdot 7 \text{ kg} = 14\text{kg}$

50 Prozent nannten wir 50 pro Hundert und schrieben es als $^{50}/_{100}$

Die Silbe „pro" heißt auch oft „je" oder „bezogen auf"; das ebenfalls beliebte „von" sollte jedoch gemieden werden, weil es bereits für die Multiplikation von Brüchen benutzt wurde als „Teil von". Hier jedoch der Auftrag zum Dividieren gemeint, genauer: zum Verhältnisbilden; wir ersetzen daher das „pro" am besten durch einen Bruchstrich.

Bei einfachen Zahlenverhältnissen können auch Prozentsätze bestimmt werden.

In einer Packung mit 25 Glasmurmeln sollen pro 25 Stück immer 5 rote sein. Wie viel % sind das?

Die Aussage „5 pro 25" schreiben wir als Bruch um: $^{5}/_{25}$ und erweitern so, dass der Nenner auf die vollen 100 kommt. Das ist hier mit dem Faktor 4 möglich: $^{5 \cdot 4}/_{25 \cdot 4} \ = \ ^{20}/_{100}$

Wir können aber auch einfach dividieren und damit den Bruch $^{5}/_{25}$ in einen Dezimalbruch verwandeln: $^{5}/_{25} = 5 : 25 = 0{,}2$ oder $0{,}02 \ = \ ^{20}/_{100}$

5 pro 25 ist also gleich wie 20 pro 100 oder kurz: 20%

Der Grundwert ist weniger gut zugänglich. Dieser Fragestellung kann anhand der Eingangsbeispiele aber als Bruchrechen-Aufgabe umformuliert werden:

½ von wie viel beträgt 200€ oder 50% von wie viel beträgt 200€

Weil es sich um die Hälfte handelte, muss der Grundwert (das Ganze) doppelt so groß sein. Aufgaben dieser Art sind im Moment nur sinnvoll, wenn man einfache Bruchteile von 100 als Prozentsatz verwendet, also nur 1%, 2%, 4% und so weiter, damit durch ganzzahlige Multiplikation die volle 100 erreichbar ist.

Prozentangaben als Universalmaß

Echte Schwierigkeiten liegen bei diesen Grundaufgaben nicht vor. Erfahrungsgemäß entstehen sie (in der 6. Klasse) erst durch die ungewohnten Begriffen und den Lebensbezügen in den Sachaufgaben. Aufgrund der hier möglichst einfachen Zahlenbeziehungen war auch kein echter Dreisatz nötig. Werden also besonders einfache Zahlen und Verhältnisse als Rechenbeispiele benutzt, eignen sich die Prozentaufgaben zur Bestimmung von Prozentwerten oder Prozentsätzen durchaus für mündliche Übungen.

Die Verwendung von Prozentangaben haben 3 wesentliche Vorteile:

1. *Sie stellen das Verhältnis vom Teil zum Ganzen anschaulich dar*
2. *Sie machen Anteile an einem Ganzen sehr leicht vergleichbar*
3. *Sie gelten unabhängig von der Gesamtmenge.*

Aufgaben

A) Prozentwert

1) Auf der 0,5-Liter-Flasche mit Kirschnektar steht: 50% Direktsaft. Wie viel echten Kirschsaft enthält diese Flasche und wie viel Wasser wurde zugesetzt?

2) Ein Früchtejoghurt (150 g) wird besonders gelobt, weil er viel Erdbeer-Frucht enthält. Deren Anteil wird mit 10% angegeben. Des Weiteren sind noch genannt: 5% Fett und 10% Zucker. Wieviel Gramm dieser 3 Bestandteile sind jeweils in einem Becher enthalten?

3) Nach der Geschichtsepoche über Griechenland stellten die Schüler Quizfragen dazu auf, die sie ohne zu verraten beim Lehrer abgaben. Dieser machte daraus einen Fragebogen, der

jedem der 30 Schüler gegeben wurde. Nach der Auswertung sagte der Lehrer: „20% von Euch haben alle Fragen richtig beantwortet.“ Wie viel Schüler hatten alles richtig?

4) Im Februar waren viele Schüler krank wegen Erkältung oder Grippe. In der ersten Klasse mit 20 Kindern fehlten 25%, in der 5.Klasse mit 30 Kindern waren aber es aber nur 20%. Waren in der 1.Klasse wirklich mehr Kinder krank als in der 5.?

B) Prozentsatz

5) Die Pizza vom großen rechteckigen Backblech wird in 4 x 5 gleiche Stücke geschnitten. Wie viele Stücke werden es von jeder Sorte: Eckstücke, Randstücke, Mittelstücke? Mache dazu eine Zeichnung. Wie groß sind die Prozentsätze dieser 3 Sorten?

Notizen, Reste

z.B aus Sh: Geometrische Aufgaben

Welcher Bruchteil von der Gesamtfigur ist jeweils die graue Fläche? [s. auch bei Peter ccc]

Xxx Text noch einarbeiten:

Mancher wird bei diesen Aufgaben vielleicht sagen: Das werde ich im Leben nie gebrauchen! Das stimmt, aber solche komplexen Sachverhalte denken zu können, ist von der allergrößten Bedeutung für das Leben. Wie anders sähe unser soziales Leben aus, wenn Menschen komplexere Verhältnisse verstünden und nicht nur mit Schlagworten oder aus Emotionen argumentierten. Im Übrigen ist – wie schon gesagt – das Arbeiten mit den Primfaktoren eine gute Vorbereitung für die Algebra, die ab der 6. Klasse behandelt wird und die eine der wesentlichen Voraussetzungen für unsere moderne technische Zivilisation ist, weil sie erlaubt, Gesetzmäßigkeiten allgemein mathematisch zu beschreiben.

Anhang

Periodische Dezimalbrüche

Weil aus Brüchen durch Division sehr oft periodische Dezimalbrüche entstehen, muss es auch möglich sein, letztere wieder in gewöhnliche Brüche umzuformen.

Die mathematischen Voraussetzungen können bei Schülern der 5.Klasse durchaus schon vorhanden sein, allenfalls wird die nötige Übersicht etwas mangeln. Vor allem wird dem Lehrer die freie Unterrichtszeit dafür fehlen. In der Regel wird dies in der 6. Klasse eher seinen Platz finden. In den zahlentheoretischen Betrachtungen der 9. Klasse wird dieses Thema nochmals mit algebraischen Methoden erarbeitet.

Hierher gehört es also nur vollständiger halber, aber mindestens für den Lehrer rundet sich das Bild zu einem Gesamtverständnis ab. Auch können einzelne interessierte Schüler – mathematische Überflieger gibt es ja in jeder Klasse – genauer nachfragen und die Standfestigkeit des Lehrers sollte dann nicht gleich gefährdet sein.

Das Prinzip ist gut verständlich bei rein periodischen Dezimalbrüchen mit der Periodenläge 1, zum Beispiel beim einfachen Bruch 0,333..., den wir als 1/3 kennen.

Eine Möglichkeit besteht darin, dass wir 0,333... mit 3 multiplizieren und zu 0,999... gelangen. Zur vollen 1 bleibt der theoretische Abstand von 1,000... – 0,999... = 0,000... , also gar kein Abstand mehr. Wenn aber das 3-fache einer Zahl auf 1 trifft, kann sie nur selbst nur der 3te Teil davon gewesen sein, sie kann also nur 1/3 heißen.

Üblicherweise wird die folgende zweite Möglichkeit verwendet, sie lässt sich auch leichter auf andere Perioden anwenden. Um die lästige Ziffernfolge abzuwenden, bilden wir einfach die Differenz zu einer gleichartigen Folge. Bei 0,333... nehmen wir das 10-fache und vergleichen die beiden[77]:

10-mal	≙	3,333...
- 1-mal	≙	- 0,333...
9-mal	≙	3,000...

Damit ist das 9-fache der gesuchten Zahl genau 3 und sie selbst kann daher nur 3/9 sein und das ist 1/3.

Bei einem gemischt periodischen Dezimalbruch wird erst die Periodizität bis ans Komma geschoben. Bei 0,40909... ist dies mit dem Faktor 10 möglich. Danach schieben wir genau um eine volle Periodenlänge weiter, das sind hier nochmals 2 Stellen, also das insgesamt 1000-fache:

1000-mal	≙	409,0909...
- 10-mal	≙	- 4,0909...
990-mal	≙	405,0000...
1-mal	≙	405 : 990 = $^{405}/_{990}$

Kürzen durch 9 führt von $^{405}/_{990}$ zu $^{45}/_{110}$ und weiteres Kürzen durch 5 zu $^{9}/_{22}$

Insgesamt ergibt sich also die schrittweise Umwandlung: 0,40909... = $^{405}/_{990}$ = $^{9}/_{22}$

Beim Nenner 22 erkennt man unschwer die Primzahl 11 als Ursache des periodischen Dezimalbruchs. Mit dieser Kenntnis wäre die Umwandlung mittels Erweitern natürlich einfach gewesen:

$^{11\times 0{,}4090909...}/_{11} = {}^{4{,}4999{,}999...}/_{11} = {}^{4{,}5}/_{11} = {}^{9}/_{22}$

Division von Bruch durch Bruch

Erinnerung an Erreichtes

Am Ende des Bruchrechnens wurde in der 5. Klasse noch die Division mittels der Experimente zum Enthaltensein oder gegenseitigen Messen von Bruchteilen ausprobiert und durch den bloßen Augenschein als wahr und richtig angenommen. Der dort noch angehängte rein rechnerische Zugang war in der Klasse vielleicht gar nicht mehr möglich, noch weniger die Fortführung auf beliebige Brüche.

Die geschilderten Versuche bilden gemeinsam mit dem danach entwickelten Rechenweg nun die Voraussetzungen für die gegenseitige Division beliebiger Brüche. Die Erinnerung daran – oder auch nötige Wiederholung und Ergänzung – benutzt dazu möglichst einfache Beispiele. Diese sollen nochmals klarmachen, dass es sich nur scheinbar um eine Division (im Sinne des echten Teiles) handelt, sondern um einen Vergleich oder ein Messen. Damit soll dem Unbehagen vorgebeugt werden, das normalerweise entsteht, wenn innerhalb des Rechengangs scheinbar unberechtigt die Nenner der beiden Brüche weggelassen werden. Nehmen wir dazu die Division

$^{6}/_{5} : {}^{2}/_{5} = ?$

---

[77] Mit der Schreibweise der Algebra entstehen klare Gleichungszeilen:

10 x - 1 x = 3,333... - 0,333... und daraus 9 x = 3

Für den kritischen Nichtmathematiker bleibt möglicherweise Unbehagen, weil sich eine Mogelei verbergen könnte: Wenn 0,333 verzehnfacht wird, entsteht nur 3,33. Beim Subtrahieren bleibt hinter dem Komma eine von 0 verschiedene Stelle. Beachtet man jedoch die Periodizität, so wird je nach ausführlich langer Schreibweise der 3er-Periode diese Ziffer beliebig – also unendlich – weit nach hinten zu rutschen sein, so dass tatsächlich die Periode ,000... erreicht wird.

und lesen sie nicht unbedacht als „$^6/_5$ dividiert durch $^2/_5$ ergibt wie viel?“, sondern als Enthaltensein in der Form: „wie oft sind $^2/_5$ in $^6/_5$ enthalten?“ oder dem Ablauf der Rechenzeile angepasst als: „in $^6/_5$ sind $^2/_5$ wie oft enthalten?“ mit der Antwort „3-mal“. Dass sie dabei die Nenner innerhalb der Rechnung gar nicht benutzten, sondern nur die beiden Zähler verglichen hatten, fällt den Schülern kaum auf. Aber gerade dieser Umstand ist im folgenden Fortgang von entscheidender Bedeutung.

Dasselbe Verfahren ist natürlich auch bei Brüchen möglich, die sich nicht ganzzahlig dividieren lassen. Die eigentliche Hürde liegt beim Formulieren des Ergebnisses, weil die Division einen Bruch hinterlässt. Bei

$^3/_5 : {}^2/_5 = ?$

können wir wie bisher argumentieren:

Wie oft sind in 3 Fünftelstücken die 2 Fünftelstücke enthalten?

Oder ohne Beachtung des (gleichen) Namens:

Wie oft sind in 3 Dingen 2 gleichartige Dinge entnehmbar?

Bei Maßvergleichen ist das passende Alltagsbild den Schülern leicht erinnerbar. Bei 3m : 2m nennen sie darauf sofort die Antwort:

In 3 Meter sind die 2 Meter 1½-mal enthalten, also so oft, wie in 3 die 2 enthalten ist.

In der uns vertrauten Schreibweise als 3 : 2 entspricht dies der Division 3 : 2, deren Ergebnis wir wie gewohnt als $^3/_2$ oder 1½ schreiben. Als Gesamtrechenzeile sieht dies dennoch befremdlich aus, vor allem, weil die ehemaligen Nenner wegfielen und dafür ein neuer Bruch entstand:

$^3/_5 : {}^2/_5 = 3 : 2 = {}^3/_2$ (= 1½-mal)

Nur die Text-Antwort:

„In den 3 Fünftelstücken sind 2 Fünftelstücke 1½-mal enthalten“

kann das Ergebnis zufriedenstellend formulieren.

Diesen Zwischenschritt beim Enthaltensein (Übergang vom Bruch-Vergleich zu ganzzahligem Vergleich) behalten wir zunächst bei und gewöhnen so die Schüler an den Rechenablauf durch weitere einfache, angeschriebene, aber mündlich zu berechnende

Aufgaben

der Art 5/2 : 3/2 [in 5/2 sind 3/2 so oft enthalten wie in 5 die 3 enthalten ist, also:]
5/2 : 3/2 = 5 : 3 = 5/3 [in 5/2 sind 3/2 also $^5/_3$–mal enthalten]

1. a) 5/3 : 2/3 [= 5:2 = 2 ½-mal] b) 5/4 : ¾ c) 3/7 : 2/7 d) 6/9 : 4/9

2. Erst geeignet erweitern: a) 2/5 : 3/10 b) 4/3 : 5/6 c) 1/3 : 2/15 d) 3/2 : 5/6

(wir dürfen nur gleichartige Dinge vergleichen, statt 2/5 : 3/10 benutzten wir 4/10 : 3/10)

Gewöhnung und Wieder-Erkennen fallen leichter, wenn dieses Thema parallel zum normalen Unterricht als Sonderthema über 2-3 Tage verteilt wird und der oben genannte Übergang beim Enthaltensein beibehalten wird, anfangs noch schriftlich, dann nur noch mündlich begleitend. Ist dann eine gewisse Festigkeit erreicht, so fehlt nur noch der letzte Schritt, um zwei beliebige Brüche durcheinander zu dividieren: Sie müssen vergleichbar, das heißt gleichnamig gemacht werden. Bei den obigen Aufgaben war die jeweilige Erweiterungszahl durch günstige Zahlenwahl sofort zu erkennen. Für die Fortführung auf einander weiter entfernte Brüche (mit leicht erreichbarem Hauptnenner) kann hier noch eingeschoben werden:

2. c) 3/10 : 2/15 d) 3/8 : 1/12 e) 5/14 : 5/21

Wirklich nötig wäre es aber nicht, weil nach dem nächsten Schritt eine so einfache Lösung gefunden wird, die alle bisherigen und weiteren Probleme wie von Zauberhand erledigt.

Um das Prinzip zu verstehen genügt ein einziges Beispiel mit dem ungünstigsten Fall, nämlich Brüche mit keinerlei Verwandtschaft. Wir benutzen daher Zahlen ohne gemeinsame Teiler, die wir mit vier Farben kennzeichnen können. Dadurch bleibt im Ergebnis die Herkunft der Endzahl sichtbar. Geeignete und auch kleine Zahlen sind beispielsweise 3; 4; 5; 7. Aus ihnen bilden wir einander fremde Brüche und stellen damit eine Divisionsaufgabe, diese kann heißen:

$$\frac{4}{5} : \frac{3}{7}$$

Eine erste Abschätzung sagt uns: „Fast 1 geteilt durch knapp ½, also wird 3/7 in 4/5 etwa 2-mal enthalten sein“. Den Vergleich bereiten wir mit geeignetem Erweitern vor, den ersten Bruch erweitern wir mit 7, den zweiten mit 5. Dadurch erhalten wir zwei Brüche mit dem gemeinsamen Nenner 35. Für den Vergleich genügt nun wieder das Enthaltensein beziehungsweise die Division der beiden Zähler, indem wir sagen: „in 28/35 sind 15/35 so oft enthalten wie in 28 die 15 hineinpasst“. Damit begründen wir die Rechenzeile:

$$\frac{4}{5} : \frac{3}{7} = \frac{4 \cdot 7}{5 \cdot 7} : \frac{3 \cdot 5}{7 \cdot 5} = \frac{28}{35} : \frac{15}{35} = 28 : 15 = \frac{28}{15}$$

Die Lösung heißt also:

$$\frac{4}{5} : \frac{3}{7} = \frac{28}{15}$$

Wir schauen im Ergebnis-Bruch nach, welche Zahlen bei ihm Zähler und Nenner gebildet haben. Das waren im Zähler: $28 = 4 \cdot 7$ und im Nenner: $15 = 5 \cdot 3$

$$\frac{4}{5} : \frac{3}{7} = \frac{28}{15} = \frac{4 \cdot 7}{5 \cdot 3}$$

Das Ergebnis 28/15 liegt nur um 2/15 unter 2 Ganzen; dies bestätigt unsere Abschätzung, dass der zweite Bruch 3/7 im ersten 4/5 etwa 2-mal enthalten ist.

Unabhängig, über welchen der bisher vorgeschlagenen Wege die Schüler geführt wurden, kann nun die Rechenregel abgekürzt formuliert und dann ganz einfach benutzt werden. Die Herleitung wird verblassen, bleiben sollte jedoch die Empfindung, dass sie sinnvoll ist und jederzeit aufs Neue verstehbar sein könnte.

Rechenregel für die Division mit Brüchen:

Durch einen Bruch teilen wir, indem wir mit seinem Kehrwert malnehmen.

Oder:

Die Multiplikation mit dem Kehrwert des Bruchs ersetzt die Division durch diesen.

Oder:

Statt durch einen Bruch zu dividieren, dürfen wir mit dessen Kehrwert multiplizieren.

Gemeinsam mit der Rechenregel für die Multiplikation von Brüchen werden alle bisher einzeln besprochenen Sonderfälle einheitlich bearbeitbar. Ganze Zahlen passen wir an die Regeln an, indem wir sie zu Einteln machen.

Aufgaben

Benutze nur noch die beiden Bruchrechenregeln für Multiplikation und Division. Ziehe beim Ergebnis die Ganzen heraus und vereinfache es so zu einer gemischten Zahl. Vergleiche die Endgröße mit gut bekannten Werten (Ganze, Halbe, Viertel)

1) Ganze Zahl mal Bruch: $5 \cdot \frac{3}{7} = \frac{5}{1} \cdot \frac{3}{7} = \frac{5 \cdot 3}{1 \cdot 7} = \frac{15}{7} = 2\,^{1}/_{7}$ (weniger als 2¼)

a) $7 \cdot \frac{3}{20}$ b) $2 \cdot \frac{3}{5}$ c) $4 \cdot \frac{5}{23}$ d) $\frac{4}{13} \cdot 4$ e) $\frac{8}{25} \cdot 2$ f) $\frac{5}{12} \cdot 5$

2) Bruch mal Bruch: $\frac{5}{4} \cdot \frac{3}{7} = \frac{5 \cdot 3}{4 \cdot 7} = \frac{15}{28}$ (etwas mehr als ½)

a) $\frac{5}{2} \cdot \frac{3}{7}$ b) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}$ c) $\frac{5}{4} \cdot \frac{5}{3}$ d) $\frac{4}{3} \cdot \frac{2}{3}$ e) $\frac{8}{15} \cdot \frac{3}{5}$ f) $\frac{5}{2} \cdot \frac{5}{13}$

3) Bruch geteilt durch ganze Zahl: $\frac{4}{3} : 5 = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{4 \cdot 1}{3 \cdot 5} = \frac{4}{15}$ (etwas weniger als ¼)

a) $\frac{5}{2} : 4$ b) $\frac{3}{5} : 5$ c) $\frac{49}{6} : 8$ d) $\frac{44}{3} : 15$ e) $\frac{28}{15} : 3$ f) $\frac{25}{12} : 4$

4) Ganze Zahl geteilt durch Bruch: $5 : \frac{8}{13} = \frac{5}{1} \cdot \frac{13}{8} = \frac{5 \cdot 13}{1 \cdot 8} = \frac{65}{8} = 8^1/_{24}$ (knapp über 8)

a) $4 : \frac{3}{7}$ b) $2 : \frac{1}{2}$ c) $4 : \frac{1}{4}$ d) $5 : \frac{2}{3}$ e) $2 : \frac{28}{15}$ f) $6 : \frac{5}{2}$

5) Bruch geteilt durch Bruch $\frac{5}{3} : \frac{8}{13} = \frac{5}{3} \cdot \frac{13}{8} = \frac{5 \cdot 13}{3 \cdot 8} = \frac{65}{24} = 2^{17}/_{24}$ (über 2½)

a) $\frac{5}{2} : \frac{3}{7}$ b) $\frac{1}{2} : \frac{3}{5}$ c) $\frac{1}{4} : \frac{5}{3}$ d) $\frac{1}{2} : \frac{1}{3}$ e) $\frac{8}{15} : \frac{3}{8}$ f) $\frac{5}{2} : \frac{3}{13}$

6) Vor der Berechnung versuchen wir immer so weit wie möglich zu kürzen:

$$\frac{8}{15} : \frac{4}{5} = \frac{8}{15} \cdot \frac{5}{4} = \frac{8 \cdot 5}{15 \cdot 4} \text{ (kürzen mit 5 und 4) } = \frac{2}{3}$$

a) $\frac{5}{12} \cdot \frac{3}{4}$ b) $\frac{15}{8} : \frac{5}{4}$ c) $\frac{15}{4} \cdot \frac{8}{3}$ d) $\frac{4}{3} : \frac{2}{3}$ e) $\frac{8}{15} : \frac{4}{5}$ f) $\frac{25}{2} \cdot \frac{1}{50}$

7) Mehrere Multiplikationen dürfen gemeinsam durchgeführt (und gekürzt) werden[78]:

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{8}{15} \cdot \frac{5}{4} = \frac{3 \cdot 8 \cdot 5}{2 \cdot 15 \cdot 4} \text{ (kürzen mit 2, 3, 5 und 4) } = \frac{1}{1} = 1$$

a) $\frac{18}{25} \cdot \frac{5}{12} \cdot \frac{3}{4}$ b) $\frac{15}{8} \cdot \frac{2}{25} \cdot \frac{10}{3} \cdot \frac{1}{2}$ c) $\frac{15}{4} \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{12}{5} \cdot \frac{2}{3}$ d) $\frac{44}{15} \cdot \frac{12}{5} \cdot \frac{45}{24} \cdot \frac{10}{33}$

Fertig evt. noch formatieren:

Rechenvorteile

Mit der wachsenden Überschau und Beweglichkeit in größeren Zahlenräumen kann auch die Anwendung von speziellen Rechenwegen bei geeigneten Aufgaben verständlich werden. Die einfachsten Verfahren – Verdoppeln und Halbieren als Ersatz für die Multiplikation und Division mit 4 oder 5 – wurden mit entsprechend plausiblen Hinführungen bereits mehrfach an den geeigneten Stellen genannt. Sie und weitere Kniffe sind hier unter genauer Nennung der angewandten Gesetzmäßigkeiten erläutert. Sie sind zwar nicht in dieser Form für die Schüler geeignet, können aber dennoch mit konkreten Zahlen angewandt und geübt werden.

1. Multiplikation mit 5: Soll eine gerade Zahl z mit 5 multipliziert werden, so nimmt man die Hälfte von z und hängt eine 0 an.

Begründung: Ist z gerade, so kann man den Faktor 2 herausziehen: z = 2y. Dann ist 5 · z = 5 · (2 · y). Das ist wegen des Vereinigungsgesetzes (Assoziativgesetzes) gleich (5 · 2) · y = 10 · y. Die Multiplikation mit 10 kann aber durch Anhängen einer 0 geleistet werden.

Kurz gesagt: Weil 2 × 5 = 10 ist, kann man die *Hälfte* einer geraden Zahl z mit 10 multiplizieren und erhält dasselbe wie bei der Multiplikation mit 5.

Beispiele: 5 · 26 = 10 · 13 = 130. 5 · 68 = 10 · 34 = 340, …

Ist z eine *ungerade* Zahl, so geht man zur nächst kleineren geraden Zahl, also zu z – 1 über, verfährt wie oben und addiert noch 5.

Beispiele: 5 · 27 = 5 · 26 + 5 = 130 + 5 = 135, … ccc

---

[78] Innerhalb der Rechenreihe darf aber keine Division vorkommen, außer, wenn durch Klammersetzung die Abfolge eindeutig festgelegt wurde.

2. Multiplikation mit 25: Hier wird ausgenutzt, dass $4 \times 25 = 100$ ist. Zur Vorbereitung kann man fragen: Wie viel ist 4×25 =? Wie viel ist dann 8×25? Wie viel ist dann 12×25? 16×25?… Ist das verstanden, kann man durcheinander fragen: 12×25? 32×25? 36×25? 20×25? 40×25?… Für die Kinder, die das Vorgehen noch nicht verstanden haben, kann man es durch andere Kinder erklären lassen.

Dann kann man übergehen zu: 36×25? 37×25? 38×25? 39×25? 40×25? Einige Kinder werden erklären können, warum sie auch diese Multiplikationen so rasch im Kopf ausführen können. Dann kann man die Reihe $1 \times 25 = 25$; $2 \times 25 = 50$; $3 \times 25 = 75$; $4 \times 25 = 100$ durchgehen und ausführlich erläutern, wie man von $36 \times 25 = 900$ zu $37 \times 25 = 925$ zu $38 \times 25 = 950$… übergehen kann.

Ist nun zum Beispiel die Zahl 47 mit 25 zu multiplizieren, so schaut man zunächst, wie viele 4er in 47 stecken. Es sind 11. Bei der Multiplikation entstehen also 11 Hunderter. Das sind 1100. Dazu kommt $3 \times 25 = 75$. Insgesamt erhalten wir also $47 \times 25 = 1175$.

Eine mehr formale Begründung verläuft entsprechend wie bei der Multiplikation mit 5.

3. Multiplikation einer Zahl mit 125: Hier wird verwendet, dass $8 \times 25 = 1000$ ist. Dann ist nämlich $16 \times 25 = 2000$…
4. Multiplikation einer Zahl mit 11: Multipliziert man eine Zahl mit 11, so kann man folgendermaßen vorgehen: Man schreibt als Ergebnis die erste Ziffer (von links) der Zahl hin und schreibt rechts daneben der Reihe nach die Summe zweier aufeinanderfolgender Ziffern. Am Ende fügt man noch die Einer-Ziffer an.

Beispiel: $3451 \times 11 = 37961$.

Ist die Summe zweier benachbarter Ziffern größer als 9, so addiert man zur zuletzt gebildeten Ergebnisziffer den Übertrag. Der Grund liegt natürlich darin, dass man das 10-fache und 1-fache des Multiplikanden addiert

5. Multiplikation zweier Zahlen zwischen 10 und 20: Hier sollen für den Lehrer wieder zunächst das Verfahren und seine Begründung zunächst formal gezeigt werden, damit er selber genügend Sicherheit erhält. Wir erläutern das Verfahren an einem Beispiel:

Ist 13×17 zu berechnen, so machen wir uns zunächst klar, dass ausführlich geschrieben, dieser Ausdruck bedeutet $(10 + 3) \times (10 + 7)$. Nach dem Verteilungsgesetz (Distributionsgesetz) ist jeder Summand der ersten Klammer mit jedem Summand der 2. Klammer multiplizieren. Es ist also

$13 \times 17 = (10 + 3) \times (10 + 7) = 10 \times 10 + 10 \times 7 + 3 \times 10 + 3 \times 7$. In den ersten drei von diesen Summanden kommt die 10 als Faktor vor. Wir zählen, wie oft die 10 vorkommt. Es sind $10 + 7 + 3 = 20$. Wir haben also insgesamt 20 Zehner. Das sind 200. Dazu kommt noch das Produkt der Einer, $3 \times 7 = 21$. Insgesamt haben wir also erhalten: $13 \times 17 = 221$.

Es ist gut, sich das Verfahren an einer Reihe weiterer Beispiele klarzumachen.

Als Regel kann man festhalten: Zwei Zahlen zwischen 10 und 20 können multipliziert werden, indem man zu einer der Zahlen die Einer der 2. Zahl addiert und das Ergebnis mit 10 multipliziert (Null anhängen). Dazu wird das Produkt der Einer beider Zahlen addiert.

Beispiel: $12 \times 19 = (12 + 9) \times 10 + 2 \times 9 = 21 \times 10 + 18 = 210 + 18 = 228$.

Den Kindern kann man das Vorgehen im Prinzip wie oben erklären, indem man dem Gang der Rechnung mündlich folgt. Es wird sich zeigen, dass ein großer Teil der Kinder bald solche Aufgaben schneller als der Lehrer lösen kann. Wie man den unterschiedlichen Fähigkeiten der Kinder im Unterricht gerecht werden kann, muss der Lehrer selber entscheiden. Es kann nicht erwartet oder verlangt werden, dass alle Kinder gleich schnell rechnen. Oft hilft eine *innere Differenzierung* durch unterschiedliche Aufgabenstellungen. Natürlich kann man auch Schüler fragen, ob man nicht die Regel auf Zahlen zwischen 10 und 30 erweitern kann.

Nicht so sehr wegen ihrer praktischen Bedeutung als vielmehr für die Ausbildung einer geistigen Beweglichkeit und eines sicheren Arbeitens auf der Vorstellungsebene sind solche Rechenverfahren zu empfehlen. Im Übrigen gibt es eine Reihe weiterer Verfahren, die in der Literatur bzw. im Internet gefunden werden können.

Teilerregeln

Teilerregeln dienen dazu, bei großen Zahlen die Teilbarkeit (ohne Rest) durch eine bestimmte Zahl zu prüfen. Beim Kürzen von Brüchen können sie eine wertvolle Hilfe sein, um rasch und sicher geeignete Kürzungszahlen zu finden, ohne erst eine komplette Primzahlzerlegung zu starten. Die bekanntesten Regeln gibt es für die Teilbarkeit durch 10, 2, 5, 3, 9 und 11. Für die Schüler der 5. Klasse wurden bereits einfache Hinführungen dazu praxisnah entwickelt.

Die folgenden Regeln können von den Kindern zwar angewandt, aber nicht wirklich mit der wünschenswerten Strenge begründet werden. Die nachfolgend dargestellten mathematisch-formalen Beweise sind dazu nicht geeignet. Sie sind hier angefügt, weil sie in den Gesamtkontext der Teilbarkeitsregeln gehören und der interessierte Lehrer sich damit besser absichern kann.

Die Kinder kann man aber darauf verweisen, dass die genaue Begründung im Rahmen einer elementaren Zahlentheorie in der 9. Klasse möglich wird bis hin zur Ausdehnung auf nicht-dezimale Stellenwertsysteme. Zunächst ist zu beachten, dass diese Teilerregeln nur für die Schreibweise der Zahlen im Dezimalsystem gelten. Sie sind also nicht besondere Eigenschaften dieser Zahlen, wie zum Beispiel die Eigenschaft Primzahl zu sein. Ausgenutzt wird lediglich ihre Darstellung durch Ziffern im dezimalen Stellwertsystem. Zu beachten ist auch, dass 0 durch jede Zahl teilbar ist (mit Ergebnis 0, ohne Rest).

Teilbarkeit durch 10

Eine Zahl ist durch 10 teilbar, wenn am Ende eine Null steht.

Begründung: Wir erinnern uns, dass zum Beispiel 3412 die Abkürzung für die Summe $3 \times 1000 +4 \times 100 +1 \times 10 +2 \times 1$ bedeutet. Formal bestätigt man die Regel, indem man die 10 aus den ersten drei Summanden ausklammert:

$3 \times 1000 +4 \times 100 +1 \times 10 +2 \times 1 = (3 \times 100 +4 \times 10 +2 \times 1) \times 10 +2 \times 1$. Beim ersten Anteil – der Klammer mit dem Faktor 10 – ist wegen dieses Faktors die Teilbarkeit durch diesen gesichert. Es kommt also nur darauf an, ob der zweite Anteil – die Zahl der Einer – durch 10 teilbar ist. Dies ist nur für 0 Einer möglich.

Teilbarkeit durch 2 und 5

Eine Zahl ist durch 2 oder 5 teilbar, wenn die Einer durch 2 bzw. 5 teilbar sind. Oder: Eine Zahl ist durch 2 teilbar, wenn sie einen geraden Einer besitzt. Sie ist durch 5 teilbar, wenn die Endziffer 0 oder 5 ist.

Die Begründung ergibt sich unmittelbar aus der Teilerregel für 10: Da 2 und 5 Teiler von 10 sind, sind die Zehner, Hunderter… immer durch 2 und 5 teilbar. Es kommt also nur auf die Einer an.

Teilbarkeit durch 3 und 9

Eine Zahl ist durch 3 oder 9 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 3 bzw. 9 teilbar ist. Dabei versteht man unter der Quersumme die Summe aus allen Ziffern einer Zahl.

Diese Regel ist so verblüffend einfach, dass man sie gerne konkret an Beispielen testet, etwa bei:

63, 33, 72, 111, 65, 51, 45, 729, 732, 733, 9999, 4545, 71912, 81374493, 81374499.

Bei der Prüfung der Teilbarkeit durch 3 kann man übrigens alle Ziffern oder Ziffergruppen weglassen, bei denen die Teilbarkeit durch 3 offensichtlich ist. So kann man bei den letzten beiden Beispielen statt 81374493 nur die Zahl 744 prüfen, denn 8 + 1 ist 9, also durch 3 teilbar, und ebenso die 3er und der 9er. Es ist also tatsächlich nur die Quersumme von 744 gleich 15 zu prüfen. Da 15 durch 3 teilbar ist, ist es auch die Ausgangszahl. Entsprechend reduziert sich die Prüfung der Zahl 81374499 auf die Prüfung von 3744. Die Quersumme dieser Zahl ist 18, also ist sie durch 3 teilbar.

Eine entsprechende Vereinfachung gilt für die Teilbarkeit durch 9; hier dürfen alle Ziffern oder Zifferngruppen weggelassen werden, die durch 9 teilbar sind.

Zur Begründung der Teilbarkeitsregeln für 3 und 9 kann man sehr schön auf das rhythmologische Rechnen zurückgreifen und es erweitern, indem man fragt: Wie umspielen sich der 9er-Rhythmus und der Rhythmus von 1, 10, 100, 1000,… (der Rhythmus der Potenzen von 10) – und damit auch der 3er-Rhythmus? Wie nahe kommen die Rhythmen einander? 9 ist um 1 kleiner als 10, 99 ist ebenfalls um 1 kleiner als 100, ebenso ist 999 um 1 kleiner als 1000, … Der 9er-Rhythmus kommt also dem Rhythmus von 1, 10, 100, … immer auf 1 von unten nahe. Wählen wir als Beispiel die Zahl 4563, so bedeutet dies, ausführlich geschrieben: $4 \times 1000 + 5 \times 100 + 6 \times 10 + 3 \times 1$. Kommt der 9er-Rhythmus 1000 in 999 auf 1 nahe, so $4 \times 1000 = 4000$ nur auf 4. 100 kommt der 9er-Rhythmus in 99 ebenfalls von unten her auf 1 nahe. Bei Division von 100 durch 9 bleibt also der Rest 1, bei 200 der Rest 2, bei 300 der Rest 3 … Bei der Prüfung der Teilbarkeit brauchen wir uns also nur um die Summe dieser Reste kümmern. Das ist aber die Quersumme.

Etwas formaler ausgeführt kann man schreiben:

$$4563 = 4 \times (1000 - 1) + 5 \times (100 - 1) + 6 \times (10 - 1) + 4 + 5 + 6 + 3.$$

Die Klammern sind immer durch 9 teilbar. Es fehlt aber in jeder Klammer eine 1. Dies gleicht man dadurch aus, dass man das Fehlende am Ende wieder addiert. Das ist aber die Quersumme, und nur diese muss noch auf die Teilbarkeit geprüft werden.

Da 3 ein Teiler von 9 ist, umspielt sie die Folge der Zehnerpotenzen wie die 9. Für sie gilt also dieselbe Regel.

Teilbarkeit durch 11

Eine Zahl ist durch 11 teilbar, wenn ihre Wechselsumme durch 11 teilbar ist.

Unter der *Wechselsumme* einer mehrstelligen Zahl versteht man dabei die Zahl, die sich ergibt, wenn man jede zweite der durch die einzelnen Ziffern dargestellten Zahlen addiert und von der Summe die übrigen Zahlen subtrahiert. Natürlich ist es gleichgültig, in welcher Reihenfolge man die Additionen bzw. Subtraktionen ausführt; man hat nur die richtigen Zahlen auszuwählen. Zum Beispiel ist die Wechselsumme von 7351267:

$$7 - 3 + 5 - 1 + 2 - 6 + 7 = (7 + 5 + 2 + 7) - (3 + 1 + 6) = 21 - 10 = 11.$$

Die Wechselsumme kann negativ ausfallen wie bei 1826 (-11) oder auch Null sein wie bei 77553311; die Teilbarkeitsregel gilt dennoch.

Die Begründung der Teilerregel für 11 ist in Manchem ähnlich, wie bei der Teilbarkeit durch 9. Wir betrachten den (additiven) 11er-Rhythmus, 11, 22, 33,… im Verhältnis zum (multiplikativen) 10er-Rhythmus, dem Rhythmus der 10er-Potenzen 10, 100, 1000,…. Wo der 11er-Rhythmus bis auf 1 (von unten oder von oben) an eine 10er-Potenz herankommt, ist abwechselnd um 1 größer oder um 1 kleiner als die Zehnerpotenzen:

$$10 = 1 \times 11 - 1;\ 100 = 9 \times 11 + 1;\ 1000 = 91 \times 11 - 1;\ 10000 = 909 \times 11 + 1;$$

$$100000 = 9091 \times 11 - 1;\ 1000000 = 90909 \times 11 + 1;\ \ldots$$

Lässt irgendeine Zahl bei der Division durch 11 den Rest 1 wie zum Beispiel $34 = 3 \times 11 + 1$, dann lässt das Zehnfache dieser Zahl den Rest 10, also im Beispiel: $340 = 30 \times 11 + 10$. Nun ist $10 = 11 - 1$. Also ist $340 = 30 \times 11 + (11 - 1)$. Daraus ergibt sich wiederum $340 = 30 \times 11 + 1 \times 11$

$- 1 = 31 \times 11 - 1$. Multiplizieren wir $340 = 31 \times 11 - 1$ nochmals mit 10, so erhalten wir $3400 = 310 \times 11 - 10$. Setzen wir wieder ein $10 = (11 - 1)$, so erhalten wir $3400 = 310 \times 11 - (11 - 1) = 311 \times 11 + 1$. Und so setzt sich die Reihe bei Multiplikation mit 10 fort: Wir erhalten abwechselnd -1, +1, -1, +1,… Nichts anderes liegt oben vor, wo die Rechnung mit 10 begonnen wurde.

Gliedert man die Zahlen 10, 100, 1000, 10.000, 100.000, 1.000.000,… so in Vielfache von 11, dass der Betrag des Restes möglichst klein wird, dann wechseln sich als Reste ab -1, +1, -1, +1,… Dabei beginnt die 10 mit $10 = 1 \times 11 - 1$. Die -1 steht also bei den Zehnerpotenzen mit ungeraden Anzahlen von Nullen; bei einer geraden Anzahl von Nullen ergibt sich +1.

Diesen Sachverhalt verwenden wir nun, um die Teilerregel für 11 verständlich zu machen:

Ist die Zahl 53427 durch 11 teilbar? Um das ohne ausführliche Division zu prüfen, formen wir die Zahl schrittweise um:

> $53427 = 5 \times 10.000 + 3 \times 1000 + 4 \times 100 + 2 \times 10 + 7$. Auf die Zehnerpotenzen wenden wir nun die oben gefundene Zerlegung an:
>
> $53427 = 5 \times (909 \times 11 + 1) +3 \times (91 \times 11 - 1) +4 \times (9 \times 11 + 1) +2 \times (11 - 1) +7$.

Diesen Ausdruck können wir so umformen, dass wir zunächst die Klammern aus Multiplizieren und dann die 11 aus allen Summanden herausziehen (ausklammern), in denen sie offensichtlich steckt. Wir erhalten dann:

> $53427 = 11 \times (5 \times 909 + 3 \times 91 + 4 \times 9 + 2) +5 - 3 + 4 - 2 + 7$.

Um das Produkt mit dem Faktor 11 brauchen wir uns nicht weiter zu kümmern, denn es ist in jedem Fall durch 11 teilbar. Es kommt also nur auf die *Wechselsumme*

> $+5 - 3 + 4 - 2 + 7 = 11$.

an. Da 11 durch 11 natürlich teilbar ist, ist auch 53427 durch 11 teilbar.

Eine Nachprüfung ergibt bei 53427 durch 11 eine aufgehende Division mit dem Ergebnis als 4857 ohne Rest. Eine weitere Anwendung bietet das rasche Kürzen der Brüche 33/77; 77/385; 385/1155 mittels des erkennbaren Teilers 11.

Besonderheiten

Einen interessanten Aspekt bietet die Betrachtung von Zahlen, welche die Teilbarkeitsregel nicht erfüllen. Bei der Quersummenprüfung verbleibt dann ein von 0 verschiedener Rest. Bei 6170915 beträgt die Wechselsumme beispielsweise 25; diese hinterlässt den 11er-Rest 3. Dieser Rest tritt auch dann auf, wenn tatsächlich dividiert wird ($6170915 : 11 = 560992R_{11}3$).

Bei Addition, Subtraktion und Multiplikation zweier Zahlen überträgt sich die Restbildung auf das Ergebnis. Darauf beruht die Elferprobe. So haben etwa 13 und 25 die 11er-Reste 2 und 3; die Multiplikation ergibt 325 mit dem 11er-Rest 6, der sich zur Kontrolle auch mit dem Produkt der Reste 2×3 ergibt. Die Addition ergibt $13 + 25 = 38$; das Ergebnis lässt denselben 11er-Rest 5 wie die Summe der beiden Reste $2 + 3$.

Auf demselben Prinzip beruht die sehr viel beliebtere und auch bekanntere 9er-Probe. In den längst vergangenen Zeiten vor elektronischen Rechenhilfen war sie sowohl in der Schule wie auch in Technik, Verwaltung und Wissenschaft allgemein üblich.

Falls überhaupt auf diese Besonderheit eingegangen wird, beschränkt man sich in der Schule auf die 9er-Probe, die wegen der einfacheren Quersummenbildung leichter zu verwenden ist. Ihre Anwendung ist im Kapitel „Ergänzendes“ für den Unterricht aufbereitet.

Es gibt zwar noch weitere Teilbarkeitsregeln, sogar für die schwierigen Teiler 7 und 13. Wir brauchen sie nicht. Sie sind auch kaum mehr praktikabel und so ist es einfacher, direkt zu dividieren. Der an Zahlentheorie interessierte Leser sei auf die Darstellung von Locher-Ernst[79] verwiesen.

[79] Louis Locher-Ernst, Arithmetik und Algebra, Dornach 1984²