Adolf Fischer und Ernst Schuberth

Der Mathematikunterricht an Waldorfschulen

Aufbau, fachliche Grundlagen
und menschenkundliche Gesichtspunkte

Band II.2:

Bruchrechnen in den Klassen 4 und 5

Verlag Freies Geistesleben Stuttgart

E-Mail-Adressen: ernstschuberth@yahoo.com / adoric.fischer@web.de

Inhalt

Einleitung

[Hintergrund Methodisches ccc] Neu schreiben für 4-5 / Unbedingt zuerst lesen!
Auf Dopplungen in Einleitung zu Kl.3 prüfen bzw. abstimmen – manches darf auch nochmals genannt sein, weil nicht alle Lehrer das 3.Klass-Buch parallel benutzen

Die Operationen sind weitgehend mit den lateinischen Stämmen benannt – also Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division bzw. addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren – weil sie heute fast durchgängig verwendet werden. Es muss aber dem Lehrer überlassen bleiben, ob er die für die (deutschsprachigen) Kinder aus der Umgangssprache verständlicheren Ausdrücke wie zusammenzählen, abziehen, malnehmen, teilen auf dieser Stufe noch beibehalten will. Manchmal kann der Sachverhalt sogar nur durch eine deutsche Beschreibung treffend charakterisiert werden. So ist beispielsweise der mathematische Begriff Differenz je nach Zusammenhang oder Vorgehensweise besser als Rest oder als Unterschied aufzufassen. Doch sollten die lateinischen Termina zunehmend häufiger benutzt werden und im Laufe der 5.Klasse die deutschen Begriffe ganz ersetzen. Reizvoll schien es mir, wenn in angemessenem Abstand von der Behandlung im Hauptunterricht im Englischen oder auch Französischen die in diesen Sprachen nicht als fremd empfundenen lateinischen Stämme besprochen würden.

Ccc Der Aufbau des Buches und wie es zu verwenden ist. Versuch, die Anregungen Rudolf Steiners für die einzelnen Schuljahre unterrichtsnah auszuarbeiten.

Es beschreibt in der notwendigen Beschränkung den entwicklungspsychologischen, methodisch didaktischen und fachlichen Hintergrund, aus dem ein Lehrer die behandelten Gebiete für seine Schüler darstellen kann. Die dem jeweilige Stoff angefügten Übungsaufgaben umgrenzen das Arbeitsgebiet und stecken auch den möglichen Schwierigkeitsgrad ab. Sie stellen also einen gewissen Grundstock dar und sollen den Lehrer dazu anregen, diesen durch eigene Aufgaben zu ergänzen.

Ccc Es ist im Wesentlichen nicht ein Schülerbuch – auch wenn einzelne unterrichtspraktische Teile durchaus begabten Schülern zur Darstellung überlassen werden können, und natürlich die Übungen für die Schüler gedacht sind Ein vielleicht etwas ungewöhnlicher Vorschlag für das infrage stehende Alter ist: Schüler sich einen Inhalt aus diesem Buch selber aneignen und der Klasse vortragen zu lassen. Man denke nur an das freudige Lernen Rudolf Steiners aus dem Geometriebuch, das der Hilfslehrer ihm lieh!

Die Einteilung nach Schuljahren, Epochen, Wochen und Tagen gibt mehr die logische Ordnung als den tatsächlichen zeitlichen Ablauf an. Zuviel hängt in Bezug auf das zeitliche Vorgehen von der Klasse und dem individuellen Lehrer ab. Schädlich wäre es, wenn der Lehrer sich durch die Darstellung treiben ließe. Die Stoffverteilung ist also als ein Vorschlag zu betrachten. Dieser ist abgestimmt mit zwar abgestimmt auf zwei 4-wöchige Epochen, lässt sich aber übertragen auf andere Einteilungen oder Längen. Auch deckt der Stoffumfang mehr Themen ab, als auch tatsächlich im Unterricht möglich sein wird. Zuletzt muss jeder Lehrer entscheiden, wie und wann er etwas behandelt – und wie immer: Was er weglassen muss.

Achtung: Manche Aufgaben für das Sachrechnen, sind an der angeführten Stelle vielleicht noch zu anspruchsvoll. Das Sachrechnen sollte aber – wie auch andere Teile des Inhaltes – immer wieder angesprochen werden. Dann kann auf die ausgelassenen Aufgaben zurückgegriffen werden. Manche Aufgaben lassen die Antwort frei. Hier ist es wichtig, sich für jeden Lösungsansatz zu interessieren und die Schüler zu ermuntern.

Weniger empfehlenswert ist es, sich zu sagen: Das habe ich nie gelernt, das kann ich nicht verstehen und deshalb werde ich es nicht behandeln. Tatsächlich sind Gebiete, die man sich mühsam angeeignet hat, oft die im Unterricht fruchtbarsten!

Beweise werden dem Alter entsprechend nicht formal geführt. Einsicht auf dieser Stufe kann auch an geeigneten Beispielen gewonnen werden. Wer strengere Beweise sucht, findet einiges im Anhang ansonsten in der umfangreichen Ausarbeitung zur Arithmetik und Algebra von Louis Locher-Ernst[1]; auch lässt sich in der Literatur oder im Internet leicht das jeweils geeignete aufsuchen.

Dem Text vorangestellt sind einige Seiten, die der eigenen Jahresplanung dienen. Wichtig ist dabei auch, nicht nur nach vorne sondern auch zurück zu blicken: Was hat sich bewährt? Wo lagen Schwierigkeiten? Konnte der geplante Zeitrahmen eingehalten werden etc. Besonders wichtig sind solche kritischen Rückblicke natürlich für die Autoren, die zugeschickte Kopien dieser Seiten oder auch sonstige ergänzende Lageberichte als sehr hilfreich betrachten.
Dringend zu beachten ist, dass mehrfach das für eine Klasse Angegebene erst in einer der folgenden Klassen zu behandeln ist. Um die sachlich zusammengehörenden Inhalte nicht auseinander reißen zu müssen, wurden sie – wie z.B. bei den schriftlichen Rechenverfahren – in einem Kapitel zusammengefasst.
Das zentrale Anliegen der Darstellung ist es – bei allen möglicherweise bestehenden Schwächen der Darstellung -, die behandelten Inhalte den Kindern in einer altersgemäßen Weise zugänglich zu machen. Es gibt in unserer Kultur starke Kräfte, die das Denken an die Maschine fesseln wollen. Die Folge ist bis in die physiologische Prägung des Gehirns hinein ein funktionierendes Denken, eine funktionierende Intelligenz, die es zum Beispiel schwer haben wird, individuelle moralische Impulse denkend erfassen zu können – und dies mit allen Folgen. Solche Impulse leben in jedem Menschen. Können sie nicht denkend ins Bewusstsein gehoben werden, entstehen innere Diskrepanzen, die im einfachsten Fall zu Unruhe, Unzufriedenheit, aber auch zu Schlimmerem führen können. Tiefere Sehnsucht eines jeden Menschen ist in individueller Freiheit seine Menschenwürde leben zu können. Auch diejenigen, die aus was für Gründen immer die selbstbestimmte menschliche Individualität offen oder verdeckt bekämpfen, nehmen sie für das eigene Handeln in Anspruch.[2]

Unterlagen zur Jahresplanung

Wie schon für das 3. Schuljahr empfohlen, sollte sich der Lehrer Jahresplanung für das 4./5. Schuljahr

Von - Bis	Thema	Seiten	Erfahrungen

[1] Louis Locher-Ernst, Arithmetik und Algebra, Verlag am Goetheanum, Dornach / Schweiz 19xxx

[22] Auf den heute stattfindenden Kampf um die menschliche Intelligenz habe ich schon in meiner ersten Schrift *Die Modernisierung des mathematischen Unterrichts, ccc, hingewiesen.*

Der Mathematikunterricht in der 4. Klasse

In dem Lehrplanvortrag, den Rudolf Steiner am 6. September 1919 vor der Eröffnung der ersten Waldorfschule in Stuttgart gehalten hat,[3] führt er zum 4. und 5. Schuljahr aus:

> *„Im vierten Schuljahr wird das fortgesetzt, was in den ersten Schuljahren gepflogen worden ist. Aber jetzt müssen wir übergehen zur Bruchlehre und namentlich zur Dezimalbruchlehre.*
>
> *Wir wollen dann im fünften Schuljahr mit der Bruchlehre und mit der Dezimalbruchlehre fortsetzen und alles dasjenige an das Kind heranbringen, was ihm die Fähigkeit beibringt, sich innerhalb ganzer, gebrochener, durch Dezimalbrüche ausgedrückter Zahlen frei rechnend zu bewegen."*

Hier wird nur inhaltlich angegeben, was in den betreffenden Klassen zu behandeln ist. Methodisch geht er auf das Bruchrechnen acht Monate später in den in Basel gehaltenen Vorträgen etwas genauer ein:

> *„Bedenken Sie nur, wie nahe es liegt, nach den Angaben, die ich gemacht habe, beim Rechnen neben der gewöhnlich bloß beobachteten synthetischen Methode aufzusuchen die analytische Methode, von der Summe und vom Produkt, nicht allein von den Addenden und von den Faktoren auszugehen.*[4] *Wie nahe liegend wäre es, in ausführlicher Weise gerade von diesem Gesichtspunkte aus die Bruchrechnung zu behandeln und alles was damit zusammenhängt. Ich will über diese Einzelheiten nur das Folgende sagen. Ich will Sie darauf aufmerksam machen, dass wir in dem Augenblick, wo wir vom Rechnen mit ganzen Zahlen zum Rechnen mit Brüchen übergehen, wir ganz naturgemäß ins Analysieren hineinkommen, denn Zahlen bis zu Brüchen verfolgen, heißt eben Analysieren; so dass es gerechtfertigt ist, beim Bruchrechnen ein anderes Element in die Unterrichtsmethode einzuführen als beim Rechnen mit gewöhnlichen Zahlen."*

Nach einem Hinweis auf die damals verwendeten „Rechenmaschinen", die nicht zu einer zu starken Überschätzung des Anschauungsprinzips führen dürften und auf die Bedeutung der Gedächtnisbildung in diesem Alter, fährt er fort:

> *„Beim Bruchrechnen ist es etwas anderes. Weil das Entstehen des Bruches gewissermaßen etwas Analytisches ist, muss man diesem analytischen Bedürfnis, das ich in den vorigen Stunden erwähnt habe, entgegenkommen. Dafür ist es gut, die Bruchrechnung so anschaulich wie möglich zu machen. Das kann vielleicht gerade dadurch geschehen, dass man einen großen Würfel teilt in kleine Würfel.... Man kann ja sehr hübsch allerlei Beziehungen der Sechzehntel, Achtel und so weiter den Kindern klarlegen, wenn man den Würfel teilt. Wendet man dann später dazu verschiedene Farbengebung der Teile an, dann kann man, indem man die gegliederten Würfelteile wiederum zusammensetzt in verschiedenen Methoden [Weisen E.S.] daran außerordentlich viel anschaulich machen.*
>
> *Nun möchte ich aber, dass namentlich der Übergang von den gewöhnlichen Brüchen zu den Dezimalbrüchen nicht in einer unrationellen Weise, in einer unwirklichkeitsgemäßen Weise an die Kinder herantritt. Die Kinder sollten vom Anfange an ein Gefühl dafür bekommen, dass das Benutzen des Dezimalbruches eigentlich auf menschlicher Konvention, auf einer Art menschlicher Bequemlichkeit beruht, und sie sollten ein weiteres Gefühl davon bekommen, dass das Ansetzen des Dezimalbruches eigentlich*

[3] *Erziehungskunst. Seminarbesprechungen*, GA 295

[4] Vergleiche den Vortrag vom 5. Mai 1920 in *Die Erneuerung der pädagogisch-didaktischen Kunst durch Geisteswissenschaft,* GA 301 sowie seine Ausführungen dazu im 4. Vortrag von Erziehungskunst. Seminarbesprechungen und die Vorträge vom X und Y in Erziehungskunst 1. Methodisch-Didaktisches. Siehe auch Ernst Schuberth, Der Anfangsunterricht in der Mathematik an Waldorfschulen, Stuttgart 1993

nichts weiter ist als ein Fortsetzen derselben Methoden, welche unseren Zahlen überhaupt zugrunde liegen, indem wir bis zehn zählen und dann die Zehn-Zahl neuerdings in der Zwanzig (= 2×10) enthalten ist - dann wird bei zwanzig eine neue Zehnerreihe angeschlossen und so weiter. Rechnen wir nach links mit demselben Prinzip, mit dem wir rechnen, wenn wir die Dezimalbrüche nach der rechten Seite hin ausbilden, so kann das Kind einen Begriff davon bekommen, dass das eigentlich relativ ist, dass ich eine Einheit auch haben könnte, indem ich den Dezimalbruch um zwei Stellen nach rechts setze. Dieses Konventionelle, das in den Einteilungen steckt, sollte den Kindern durchaus vom Anfange an beigebracht werden.

Dann würde manches auch wiederum Konventionelle sich hineinfügen in die soziale Ordnung. Mancher falsche Autoritätsglaube würde verschwinden, wenn alles dasjenige, was im Grunde genommen auf Übereinkunft beruht, von vornherein auch als solches durch Übereinkunft Festgestelltes an das Gemüt des Kindes herangebracht würde. Vor allem aber wird geisteswissenschaftliche Durchdringung diese Erziehungskunst so zu gestalten versuchen, dass das Kind in der Zeit vom Zahnwechsel bis zur Geschlechtsreife mit Berücksichtigung all dessen, was wir über die Lebensepochen und das Hervortreten der Fähigkeiten in den Lebensepochen gesagt haben, dazu kommt, eine Vorstellung von dem praktischen Leben zu haben. Jeder einzelne Gegenstand sollte dazu verwendet werden, das Kind hineinzuführen in eine Anschauung über das praktische Leben.“[5]

Rudolf Steiner greift hier im Zusammenhang mit dem Bruchrechnen eine Reihe von Unterrichtsprinzipien wieder auf, die er schon in früheren pädagogischen Vorträgen dargestellt hat. Dies sind: Der Beginn mit der Analyse vor einer Synthese, die klare Unterscheidung von Konvention und in der Sache liegender Gesetzmäßigkeit, die Forderung nach Lebenspraxis und die Betonung der Aufgabe, allgemeine menschliche Fähigkeiten, nicht nur spezielle Fachkenntnisse im Kind zu entwickeln.

Gegenüber vielen traditionellen Unterrichtskonzepten erscheint der vorgeschlagene Zeitpunkt zur Einführung des Bruchrechnens recht früh gelegen, nämlich bereits in der 4. Klasse. Bei einem Vergleich mit Darstellungen, welche für eine 6. Klasse konzipiert sind, ist dies zu berücksichtigen.

Nimmt man den Rückbezug zu den vor allem für die ersten Klassen gegebenen Anregungen auf,[6] so ergibt sich für den Lehrer die Möglichkeit, die Kinder vieles noch einmal auf höherer Stufe durchleben zu lassen, was ihnen im Anfangsunterricht begegnete. Damit ergibt sich eine Curriculumspirale: Auf höherem Niveau kehrt das Kind zu Themen zurück, mit denen es sich schon einmal auseinandergesetzt hat. Da der Mathematikunterricht weiterhin in der Hand des Klassenlehrers liegt, kann er sehr bewusst Rückbezüge zum Vergangenen und die Betonung des Neuen gestalten.

Im Band 3, Seite 19ff. dieser Reihe haben wir auf den dreistufigen Aufbau des Mathematikunterrichts in den Klassen 1 bis 8 hingewiesen. Sie bilden aus der Sicht des Klassenlehrers Unter-, Mittel- und Oberstufe seiner „Klassenlehrerzeit“. Mit der 4. Klasse beginnt die mittlere Stufe, und wir werden auf die besonderen Entwicklungsbedingungen des Kindes in diesem Alter hinweisen. Die Entwicklungssituation des Kindes kann mit Inhalt und Methodik des Unterrichts so zusammenklingen, dass die Möglichkeiten eines bildenden und erziehenden Unterrichts eine positive Resonanz bei den Kindern wecken – eine begeisternde Unterrichtserfahrung für Lehrer und Schüler.

---

[5] GA 301, 11. Mai 1920 (abends)

[6] Vergleiche Ernst Schuberth, Fußnote 2

Zur seelischen Entwicklung im 11. Lebensjahr und das Bruchrechnen

In der Zeit der 3. und 4. Klasse durchläuft das Kind eine tiefgreifende Veränderung seines seelischen Erlebens und damit seines Verhältnisses zu der sozialen und natürlichen Umwelt. Sie geht mit einer bewussteren *Selbsterfahrung* einher. Diese bewusstere Selbsterfahrung führt zu tiefgreifenden Krisen im Selbstverständnis des Kindes und in seinem Verhältnis zu den Erwachsenen. Einerseits erwacht ein verstärktes Selbstbewusstsein, mit dem es deutlicher als zuvor Innen- und Außenwelt unterscheiden und als getrennte Handlungsräume erkennen kann. Es betrachtet vieles in bewusstem Abstand und handelt entsprechend: Es verbirgt Getanes vor anderen, liebt Heimlichkeiten und erprobt nicht selten das bewusste Lügen, bei welchem ja das innere Wissen und die bei anderen Menschen geweckten Vorstellung auseinander fallen. Anderseits sucht es immer wieder Schutz bei den vertrauten Erwachsenen und versucht, noch einmal liebevoll-anhänglich zu sein

Die Zeit, in welcher sich das Kind noch weitgehend in einer Einheit mit der Welt empfindet, geht aber unumkehrbar dem Ende zu. Wie alle Krisen, ist auch diese janusköpfig: Rückwärts gewandt versucht das Kind, die alte Geborgenheit zu bewahren, nach vorne erprobt es die neue Selbständigkeit. Mit diesem Wissen können wir Erwachsene die offenkundigen Widersprüchlichkeiten verstehen, dadurch ertragen und liebevoll begleiten. [7] Rudolf Steiner weist in den Vorträgen *Die pädagogische Praxis …*[8] auf noch weitere Aspekte des infrage stehende Alters und seiner Behandlung in folgender Weise:

> *„Man muss sich nun das pädagogische Geschick aneignen, aus der Art und Weise des Kindes die große Lebensfrage, die das Kind jetzt an uns stellen will, im individuellen Falle richtig zu wägen.*
>
> *Was ist denn eigentlich diese Lebensfrage? Nun, sehen Sie, bis zu diesem Lebenspunkte hat sich das selbstverständliche Autoritätsverhältnis eigentlich so herausgebildet, dass man als Lehrer und Erzieher dem Kinde die Welt ist. Für das Kind bewegen sich die Sterne, weil es weiß, dass sein Erzieher weiß, dass sich die Sterne bewegen. Alles ist eben gut und böse, schön und hässlich, wahr und falsch, weil es der Lehrer und Erzieher so in sich hat. Es muss alles, was von der Welt kommt, in einem gewissen Sinne durch Lehrer und Erzieher durchgehen; das ist das einzig gesunde Verhältnis. Zwischen dem 9. und 10. Lebensjahr, manchmal etwas später, stellt sich, nicht in Begriffen und Vorstellungen, aber in Gefühl und Empfindung, vor die Seele des Kindes die Frage: Ja, woher hat denn der Lehrer und Erzieher das alles? Da beginnt nämlich plötzlich, wenn ich mich bildlich ausdrücken darf, dieser Lehrer und Erzieher durchsichtig zu werden. Man will hinter ihm die Welt sehen, die hinter ihm lebt. Da muss er standhalten; da muss er gegenüber dem, was das Kind heranbringt, in dem Kinde die Überzeugung erhalten, dass er richtig in das Rückwärts, in die Welt, eingeschaltet ist; dass er Wahrheit, Schönheit und Güte wirklich in sich trägt. Da prüft die unbewusste Natur des Kindes den Lehrer in einer ganz unerhörten Weise, möchte ich sagen. Sie prüft ihn, ob er nun wirklich die Welt in sich trägt, ob er würdig war, bisher ihm der Repräsentant des ganzen Kosmos zu sein.“*[9]

---

[7] Siehe auch: Hans Müller-Wiedemann, Mitte der Kindheit: Das neunte bis zwölfte Lebensjahr. Beiträge zu einer anthroposophischen Entwicklungspsychologie. Verlag Freies Geistesleben, Stuttgart 2014[7]. Hermann Koepke, Das neunte Lebensjahr, Verlag am Goetheanum 2010

8 Rudolf Steiner, Die pädagogische Praxis vom Gesichtspunkte geisteswissenschaftlicher Menschenerkenntnis. Die Erziehung des Kindes und jüngeren Menschen. GA 306, Acht Vorträge, Dornach, 15. bis 22. April 1923, 5. Vortrag vom 19. April 1923

[9] Siehe *http://anthroposophie.byu.edu/vortraege/306a.pdf*

Die Antwort auf die veränderte seelische Konstitution durch den Lehrplan

In den Waldorfschulen berücksichtigen wir diesen ganzen Komplex der genannten Veränderungen, indem wir in der 3. Klasse ausführlich die Schöpfungsgeschichte nach dem Alten Testament - das Hervorgehen der Welt aus Gott und ihre Geborgenheit in Gott - aber auch die Vertreibung aus dem Paradies mit allen Folgen darstellen. In ausgedehnten Epochen werden die Künste gepflegt, die Adam und Eva nach dem Verlust des Paradieses auszuüben hatten: den Ackerbau, den Hausbau und die Handwerke. Es gehört zu den eindrücklichsten Erfahrungen von Lehrern und Eltern, den Zusammenklang dieser Unterrichtsinhalte mit der seelischen Situation der Kinder zu erleben.[10]

In der Hausbauepoche lernt das Kind, sich und den Mitmenschen eine Behausung zu verschaffen, die ihn nicht wie das Paradies ohne Gefahren aufnimmt. Es lernt, sich neu in der Welt einzuhausen.

Dieses Herauslösen aus Weltzusammenhängen lässt die Kinder auch ein neues Verhältnis zu der außermenschlichen Natur finden. Daher setzen in der 4. Klasse die ersten naturkundlichen Betrachtungen ein, die nicht nur Naturformen - Tiere, Pflanzen und Steine - beschreiben und benennen, sondern sie werden nun in Beziehung zu einander und insbesondere zum Menschen gesetzt. Man kann sagen: Der Verlust der ursprünglichen Einheit verlangt ein bewusstes Aufsuchen der Beziehungen und damit nicht nur ein Kennen, sondern ein Erkennen.[11] Durch die Sprachlehre wird dieses bewusstere Weltverhältnis in einer ersten Wortkunde gepflegt. Hat das Kind bis dahin weitgehend naiv in und mit der Sprache gelebt, so entsteht nun ein wacheres Sprachbewusstsein, das zugleich ein wacheres Verhältnis zur sozialen Umwelt anlegt.

Wie wir aus den Lehrplanvorträgen zitierten, regte Rudolf Steiner an, das Bruchrechnen in der 4. und 5. Klasse zu behandeln.

Die Aufgabe, die der Mathematikunterricht mit dem Bruchrechnen in dieser Entwicklungssituation leisten kann, wird besonders anschaulich, wenn man den hier geschilderten Einstieg mit dem Beginn des Rechenunterrichts im 1. Schuljahr vergleicht.[12] Dort stand am Anfang der Begriff der *Einheit*. Durch Gliederung waren daraus die Zahlen hervorgegangen. Im weiteren Verlauf des Rechenunterrichtes wurde dieser analytische Beginn durch die Synthese ergänzt.

Den Beginn des Bruchrechnens haben wir ähnlich begonnen, indem wir die Einheit (den Stock) zerteilten. Wieder ist aus der Einheit die Vielheit hervorgegangen. Um den Begriff des Bruchteils zu bilden, müssen wir aber das einzelne Teil wieder auf das ursprüngliche Ganze rückbeziehen. Der Begriff eines Bruchteiles macht nur Sinn, wenn das Ganze, von dem es ein Teil ist, bekannt ist. Ein Viertel Wasser, eine Viertellänge geben keinen Sinn, wenn sie nicht auf eine Einheit wie zum Beispiel ein Liter, eine Gallone beziehungsweise ein Meter oder ein Yard bezogen werden. Die folgende Skizze symbolisiert den Unterschied im Hervorgehen der Zahlen aus der Einheit im 1. Schuljahr und der Bildung der Brüche im 4. Schuljahr.

[10] Die Frage, welchen Bezug diese alten Bilder und traditionellen Tätigkeiten zu Kindern haben können, die inmitten einer modernen technischen Umwelt aufwachsen, ist manche Überlegungen und Erfahrungen wert. Hier kann darauf nur hingewiesen werden.

[11] Siehe Rudolf Steiner, Erziehungskunst. Methodisch-Didaktisches GA 294

[12] Siehe Ernst Schuberth, Fußnote 2ccc

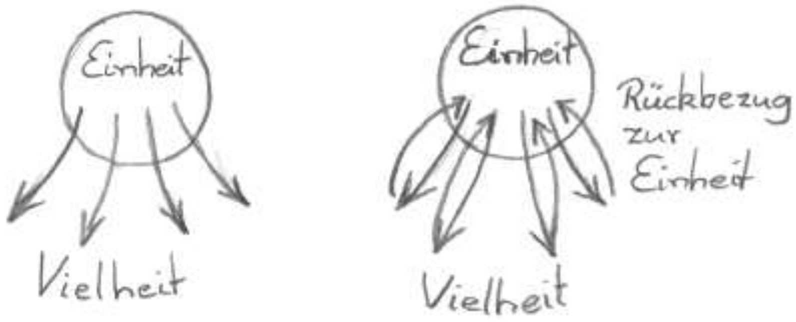


Abb.13a und 13b

Dieser Rückbezug ist nun aber charakteristisch für das beschriebene neue Weltverhältnis des Kindes in diesem Alter. In dem vorangehenden Lebensabschnitt identifizierte es sich noch stark mit allem Wahrgenommenen. Es war bewusstseinsmäßig bei den Dingen, die es wahrnahm. Es ging sozusagen in seinen Wahrnehmungen auf.

Mit dem beschriebenen verstärkten Selbstbewusstsein tritt zugleich Distanz zur Umwelt ein. Das Kind nimmt nun nicht nur die Dinge wahr, sondern es entwickelt ein stärkeres Bewusstsein dafür, dass *es selber* die Person ist, welche die Dinge wahrnimmt. Dies äußert sich auch in solchen Dingen, dass viele Kinder von sich aus jetzt beginnen, die gut bekannte Lehrerin oder den Lehrer mit *Sie* anzusprechen. Dazu treten Klagen über ein Isoliertsein auf, sie fühlen sich alleine, ohne Freund oder Freundin: Ein meist schmerzhafter Einschnitt, aber auch das erste Empfinden des eigenen Weges, auf dem die Beziehungen zu anderen Menschen neu gefunden und aufgebaut werden müssen - wie es die Erwachsenen nicht zuletzt in der Midlife-Crisis in anderer Form durchzumachen haben.

Natürlich wird im gewohnheitsmäßigen Anwenden der Bruchrechenregeln der Bezug zur Einheit kaum mehr zu Bewusstsein gelangen. Aber gerade die vielfältigen Übungen im Bilden von Bruchteilen stellen den einzelnen Bruch immer wieder in seiner Beziehung zu einer Einheit dar. Dies kann Anlass sein, derartige Übungen über längere Zeit vorzunehmen und sich nicht zu schnell nur dem Einüben der Rechenregeln zuzuwenden.

Die Zusammenarbeit im Klassenkollegium

Ganz generell sucht ein Klassenlehrer in möglichst vielfältige Beziehungen zu der Arbeit seiner Mitkollegen zu kommen - vor allem zu denjenigen, die auch in seiner Klasse unterrichten. In die *Klassenkonferenzen* gehört wie selbstverständlich eine Absprache und Abstimmung der geplanten Unterrichtsinhalte. Häufig kann der Klassenlehrer aus seinen Epochen Anregungen geben, was im Fremdsprachenunterricht, der Musik, dem Sport und anderen Fächern getan werden kann, und er erhält Anregungen aus diesen Fächern. Empfehlenswert ist es, wenn die Fachkollegen etwas später Themen aus dem Hauptunterricht aufgreifen und sie aus ihrem Fach heraus in einem neuen Licht erscheinen lassen. Wie schön klingt es zusammen, wenn nach der letztgeschilderten Übung der Musiklehrer die ganzen, halben, Viertel-, Achtel-Noten aufgreift, ihre Darstellung im Notenbild zeigt und so die Beziehung zum Bruchrechnen herstellt. Auch können in der Eurythmie die Notenwerte gelaufen und taktiert werden.[13]

Natürlich sind vielen Kindern Noten schon vertraut. Wird aber jetzt die Beziehung zum Bruchrechnen hergestellt, so gewinnen beide: der Klassenlehrer und der Musiklehrer. Für den Klassenlehrer wird die Bedeutung des Gelernten im Leben durch den Musiklehrer unterstrichen. Es lässt sich mit dem Gelernten etwas anfangen! Der Musiklehrer wiederum gewinnt für seinen Unterricht bei den Kindern ein größeres Bewusstsein und eine größere Aufmerksamkeit für die Notenwerte. Er behandelt sie natürlich nicht um der Mathematik

[13] Siehe Rudolf Steiners entsprechende Hinweise in: Erziehungskunst. Methodisch-Didaktisches, 4. Vortrag

willen, sondern wegen ihrer Bedeutung in der Musik. Er wird an Beispielen deutlich machen, wie anders wir ein Musikstück je nach seinen Notenwerten erleben. Für ihn ist dies nur ein Teil der musikalischen Elemente, mit denen er umgeht. Er kann das *Taktmäßige*, das in den Bewegungsübungen im Hauptunterricht oft überwiegt, zum *Rhythmus* steigern, der belebend die wechselnden Geschwindigkeiten in sich trägt und die Kinder ins Künstlerische erhebt. Der vom Kind erlebte Zusammenklang zweier oder mehrerer Lehrer birgt zudem in sich ein erzieherisches Moment, das in seiner Bedeutung kaum hoch genug eingeschätzt werden kann.[14]

Sehr ökonomisch wäre es, wenn die Sprachlehrer in geringer zeitlicher Versetzung zum Hauptunterricht auch die fremdsprachlichen Bezeichnungen für die Brüche einführen könnten oder sogar die Kinder dahin führten, eine vom Hauptunterrichtslehrer geschriebene Rechnung in einer Fremdsprache vorzulesen. Was heißen *Zähler* und *Nenner* in verschiedenen Sprachen? Was *Erweitern* und *Kürzen*? Für manchen nicht muttersprachlichen Fremdsprachenlehrer werden diese Fragen vielleicht Anlass zu Kontakten mit einem Muttersprachler seiner Sprache sein. Es sind für solche Querbezüge zwischen den Fächern nicht viele Stunden notwendig, aber das Wiedererkennen gleicher oder verwandter Themen bei verschiedenen Lehrern lässt die Kinder aufmerken auf das soziale Miteinander unter Erwachsenen, die sich um es bemühen.

Überblick über die 4. Klasse

In der 3. Klasse wurde mit den schriftlichen Rechenoperationen (schriftliches Addieren und Subtrahieren) begonnen. Dazu kamen das Rechnen mit Größen (Sachrechnen) und ein anfängliches rhythmologisches Rechnen. Die Formenlehre wurde noch als künstlerisch gestaltetes Formen zeichnen weiter gepflegt.

Weder die schriftlichen Rechenverfahren (Rechenalgorithmen) noch das Sachrechnen sind abgeschlossen. Sie werden in der 4. Klasse und zum Teil noch in der 5. Klasse weitergeführt und vertieft. Dennoch sollte der Mathematikunterricht in der 4. Klasse mit den neuen Inhalten, die das Bruchrechnen gibt, begonnen werden. Sie markieren am deutlichsten den Wandel, den das Kind von der 3. zur 4. Klasse seelisch vollzogen hat.

Um das Bruchrechnen nicht vom Rechenunterricht der vorangehenden Klassen isoliert erscheinen zu lassen, sollte auch alles auf höherer Stufe wieder aufgegriffen werden, was als Hauptanliegen in diesen Klassen auftrat. Nur auf zwei Dinge soll hier noch einmal hingewiesen werden: auf die seelische Färbung, die bei den Rechenoperationen durch die Tingierung mit den Temperamenten erreicht wird und auf das Sachrechnen mit seiner Hinwendung zur Welt. Damit wird der Lehrer einerseits aufgerufen, aus der Waldorfpädagogik heraus den Mathematikunterricht seelisch zu gestalten,[15] andererseits mit dem Sachrechnen lebenskundliche Elemente einzubeziehen und die immer notwendige Pflege von so genannten eingekleideten oder Textaufgaben fortzuführen.

In der Geometrie tritt *neben* das Formenzeichnen eine genauere Beschreibung der geometrischen Grundformen und ihrer Beziehungen.[16]

[14] Siehe Rudolf Steiner, Erziehungskunst. Methodisch-Didaktisches, xxx. Vortrag

[15] Rudolf Steiner, *Erziehungskunst. Methodisch-Didaktisches*, GA 294, 1. Vortrag

[16] Siehe Ernst Schuberth, Der Geometrieunterricht an Waldorfschulen, Bd.2, Vergleichende Geometrie und geometrische Grundkonstruktionen... Freies Geistesleben, Stuttgart 1998

Die Einführung des Bruchrechnens in der 4. Klasse

Die erste Epoche

Der erste Tag

Zu Beginn der ersten Rechenepoche im 4. Schuljahr gibt der Lehrer - wie am Anfang jeder Epoche - eine kurze Einführung zu dem Neuen, dem die Kinder nun begegnen werden. Der Lehrer kann darauf aufmerksam machen, wie die Kinder schon recht gut zusammenzählen (addieren), wegnehmen (subtrahieren), malnehmen (multiplizieren) und teilen (dividieren) können, wie man aber im Leben auch mit Teilen rechnen können muss. Wie teilt man Teile? Wie zählt man Teile zusammen oder wie kann man sie voneinander abziehen? An einfachen Beispielen kann man den Kindern verständlich machen, wie es zum Bruchrechnen kommt.

Ist man im 1. Schuljahr der Anregung Rudolf Steiners gefolgt, die er in Torquay/England gab, so kann man noch einmal in ähnlicher Art beginnen.[17] Dort war angeregt worden, vor den Kindern einen Stock zu zerbrechen und so aus der Einheit die Vielheit hervorgehen zu lassen.

So kann der Lehrer ohne weitere Worte erneut einen kräftigen Stock krachend zerbrechen. Urbildhaft geht damit etwas *in die Brüche*. Der ausgelöste Überraschungseffekt wird Aufmerksamkeit erregen und eine Rückbesinnung auf die 1. Klasse ermöglichen: Aus der Einheit entsteht die Zwei.

Nach der Stockteilung werden eine Anzahl mitgebrachter Äpfel verteilt, aber weniger als Kinder in der Klasse sind. Anschaulich und ansprechend wird der moralische Aspekt des *gerechten Teilens* behandelt. Ein besonders schönes Bild gibt ein großer runder Brotlaib ab, der mit seinem Duft das ganze Klassenzimmer erfüllt. Nicht ganz einfach, aber sehr bildhaft wird das Aufschneiden in die richtige Anzahl gleich großer Stücke für jedes Kind: Die Teilung erzeugt die Vielheit. Ein Bild im Epochenheft kann die Apfel- oder Brotteilung festhalten. Ein solcher Einstieg in das Bruchrechnen kann zu Aufmerksamkeit, Fragen und schließlich zum Gespräch führen.

An das Bild des zerbrochenen Stocks werden sich manche Kinder an die 1. Klasse erinnern und vielleicht sagen „Das haben Sie (oder hast Du) früher schon einmal gemacht.“ Das kann man gut aufgreifen und antworten: „Ja, das haben wir schon einmal gemacht. Da waren wir in der 1. Klasse. Wir haben gesehen, wie aus der Einheit alle anderen Zahlen hervorgehen können. Jetzt sind wir in der 4. Klasse. Ihr habt schon recht viel gelernt und seid auch tüchtig gewachsen. Deshalb können wir daran jetzt auch etwas ganz anderes lernen. Man kann nämlich an derselben Sache oft viele verschiedene Dinge lernen. Es kommt nur darauf an, dass man selber nicht immer derselbe oder dieselbe geblieben ist. Wenn man von einer Sache, die man schon kennt, etwas Neues lernt, dann merkt man am besten, dass man selber nicht mehr der oder die Alte ist.

Nun schaut, ich habe den Stock in zwei Stöcke zerbrochen. Früher haben wir so gesehen, dass aus der Eins die Zwei hervorgehen kann. Jetzt können wir uns schon viel besser erinnern, wie der Stock zuerst aussah und wie die zwei Stöcke jetzt aussehen. Wenn wir sie nun miteinander vergleichen - die beiden neuen Stöcke mit dem alten, den wir vorher hatten, vor dem Zerbrechen, so sehen wir: Jeder ist die *Hälfte* vom alten Stock. Wir sagen auch: Jeder ist ein *Halbes* vom ursprünglichen Ganzen. - Nun will ich euch zeigen, wie die Erwachsenen ein Halbes schreiben. Dazu zeichnen sie zuerst den Stock, dann schreiben sie über den Stock die

[17] Vergleiche Rudolf Steiner, *Die Kunst des Erziehens aus dem Erfassen der Menschenwesenheit* GA 3011, insbesondere 5. Vortrag und Ernst Schuberth, Der Anfangsunterricht in der Mathematik an Waldorfschulen: Aufbau, fachliche Grundlagen und menschenkundliche Gesichtspunkte, Verlag Freies Geistesleben, Stuttgart 2012

1, die uns sagt, dass der Stock die Einheit war. Wir haben ihn in 2 Teile zerbrochen. Daraus sind die beiden Hälften entstanden. Diese 2 schreiben wir unter den Stock.“

Der Lehrer begleitet dies mit dem zeichnerischen Anschrieb an die Tafel. (Abb. 1) und fährt fort.

$$\frac{1}{2}$$

Abb. 1

„So schreibt man ein Halbes auf. Wir haben die Einheit, die wir anfangs hatten, in zwei Halbe zerlegt. Deshalb können wir schreiben (Abb. 2)

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

Abb. 2

und lesen: Das Ganze ist ein Halbes und ein Halbes.“

Nachdem dies angeschaut, besprochen und gelesen wurde, kann man fortfahren: „Hier habe ich euch noch einen anderen Stock mitgebracht. Er ist auch eine Einheit. Ich werde ihn nun aber anders als den ersten Stock zerbrechen, nämlich in 3 (ungefähr) gleiche Teile.“ Und nun bricht der Lehrer den - vielleicht vorher schon eingekerbten Stock in 3 annähernd gleiche Teile. Jeder ist ein *Drittel* des ursprünglichen Stockes. „Wollen wir das Drittel schreiben, so zeichnen wir zuerst wieder den Stock auf, schreiben darüber die 1, die uns sagt, dass der Stock am Anfang die Einheit war und unter den gezeichneten Stock schreiben wir die 3. Sie sagt uns, in wie viele Teile der Stock zerbrochen wurde. Jedes Teil ist ein *Drittel* des Stockes.“ Während des Sprechens hat der Lehrer an die Tafel das Drittel zeichnerisch geschrieben. (Abb. 3)

$$\frac{1}{3}$$

Abb. 3

Wieder können wir auch schreiben

$$1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$$

Abb. 4

So verfahren wir noch am gleichen Tag mit dem Viertel und dem Fünftel. Nachdem dies alles sorgfältig in die Hefte übertragen wurde, wenden wir uns anderen Inhalten zu, die im Hauptunterricht noch Platz haben sollen, wie zum Beispiel dem Erzählstoff.

Der zweite Tag

Am zweiten Tag schreiben wir die behandelten *Stammbrüche* - das sind die Brüche, die auf dem Bruchstrich eine 1 stehen haben - an die Tafel und fragen die Kinder, was sie bedeuten. Sollte ein Kind gefehlt haben, kann man die Gelegenheit gut nutzen, ein Kind den durchgenommenen Gang noch einmal kurz darstellen zu lassen. Es darf wiederholen, was der Lehrer am Vortag den Kindern beigebracht hat. Dann kann man zunächst fortsetzen, indem man ein Sechstel, ein Siebtel, ein Achtel und so fort anschreiben lässt. Ist dies ganz gesichert, kann man nun mit einer Fülle von praktischen Tätigkeiten das *Bruchteilen* üben.

Beispielsweise kann jedes Kind eine Kugel aus weichem Ton erhalten, die am besten am Tag zuvor mit Hilfe von einigen Kindern vorbereitet wurden und durch Besprühen und Abdecken mit feuchten Tüchern weich gehalten wurden. Mit Hilfe einer Küchenwaage ist es leicht, gleiche Tonmengen für alle Kinder bereitzustellen. Kommt es dann zum Übungsteil, werden die Kugeln ausgeteilt, und jedes Kind darf seine Kugel in lauter gleiche Kugeln zerlegen.

Natürlich muss der Lehrer hier ein Auge darauf haben, dass nicht ein (z.B. sanguinisches) Kind mit winzigen Kügelchen beginnt, die womöglich Anlass zu Wurfversuchen geben.[18] Viele Kinder werden sich selbständig eine Zahl suchen, andere kann man anregen, es doch mit 13 oder 17 gleichen Kugeln zu versuchen. Am Ende wird man ein vielfältiges Anschauungsmaterial haben, das gemeinsam betrachtet wird. Jedes Kind kann dann seine eigene Gliederung in sein Heft zeichnen. Das wird nicht maßstäblich ausfallen, weil im Heft der räumliche Eindruck fehlt und die Teile flächenmäßig mit dem Ganzen verglichen werden; z.B. wirkt die (korrekte) Summe von 8 Kreisen mit halbem Durchmesser erheblich größer als das Bild des Ausgangskreises mit vollem Durchmesser. Jedes Kind schreibt zur Zeichnung, was es gemacht hat und welche Bruchteile dort zu sehen sind.

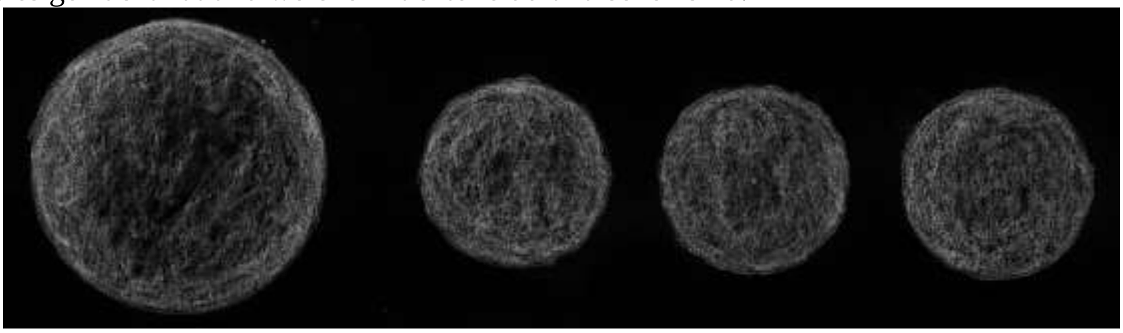


Abb. 5

Diese Übungen zum *Bruchteilen*, Brüche zu bilden, werden während einer längeren Zeit immer wieder aufgegriffen und in Variationen wiederholt. Vielfältige Beispiele, die nach und nach durchgeführt werden können, sind weiter unten angegeben. Auch werden die Kinder darauf hingewiesen, dass es zwar Viertel, Fünftel usw. heißt, nicht aber „ein Zweitel“ oder „ein Dreitel“, sondern ein Halbes und Drittel (= ein Dritt-Teil).[19]

Der dritte Tag

Am dritten Tag führen wir zunächst die Bezeichnungen *Zähler* und *Nenner* ein. Dabei kann es sinnvoll sein, zunächst die Bezeichnungen „Anzahl“ und „Name“ zu benutzen. Wir hatten gelernt, dass sich die Einheit in drei Drittel zerlegen lässt. Deswegen hatten wir geschrieben

$$1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$$

[18] Man bedenke, dass das Volumen mit der dritten Potenz des Radius wächst. Hatte die Ausgangskugel beispielsweise einen Durchmesser von 10cm (r = 5cm), dann enthält sie schon 125 Kugeln mit einem Durchmesser von 2cm (r = 1cm). Werden die Teilkugeln noch kleiner, so wächst ihre Anzahl sehr rasch (z.B. 1000 Kugeln mit d = 1cm)!

[19] Einleitend wurde gesagt, dass das vorgeschlagene Vorgehen vom Lehrer und der Klasse bestimmt werden muss. In vielen Situationen wird es richtig sein, zum Beispiel einige Tage nur mit ½ und ¼ zu rechnen, bis der Begriff des Bruches vertraut geworden ist. Daran anschließen kann sich dann zunächst das Rechnen mit Achteln, dann Dritteln, Sechsteln und Zwölfteln.

Da es sich um drei gleiche Teile handelt, können wir sie auch zählen und damit vom Addieren zum Multiplizieren übergehen. Wie wir von 2 + 2 + 2 zu · „dreimal 2“ übergehen, können wir auch von 1/3 + 1/3 + 1/3 zu „dreimal 1/3 übergehen:

1 = 1/3 + 1/3 + 1/3 = 3 · 1/3.

Wir schreiben eine solche Anzahl gleicher Teile dann statt $3 \cdot \frac{1}{3}$ viel lieber $\frac{3}{3}$ schreibt. Es ist also

$$1 = 3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{3}$$

Wir können die Kinder dies im Heft malen lassen in Form einiger gleich großer Freihandkreise, die sie in gleichmäßige Segmente aufteilen. Der erste Kreis ist ungeteilt mit der Inschrift „1“. Der zweite Kreis ist halbiert, in jeder Hälfte steht „1/2“, daneben „2/2“. Entsprechend geht es weiter mit weiteren Kreisen, wobei das Aufteilen durch fortgesetztes Halbieren in Viertel oder Achtel den Kindern besonders leicht fällt. Für die Achterteilung können wir auch einen großen auf farbiges Papier kopierten Kreis zum Ausschneiden und Falten als Hausaufgabe mitgeben und ihn später im Heft fixieren.

Nicht zu unterschätzen ist das Dritteln eines Ganzen oder gar eines Halben in Sechstel: Der erste Teil muss so abgetrennt werden, dass der verbleibende Rest genau doppelt so groß bleibt. Hier bewährt sich die vielfältige Übung im Formenzeichnen, die nun einen überschauenden Vorblick ermöglicht. Schön, aber etwas schwieriger ist die Fünfteilung, obwohl der Fünfstern als Figur gut bekannt ist.

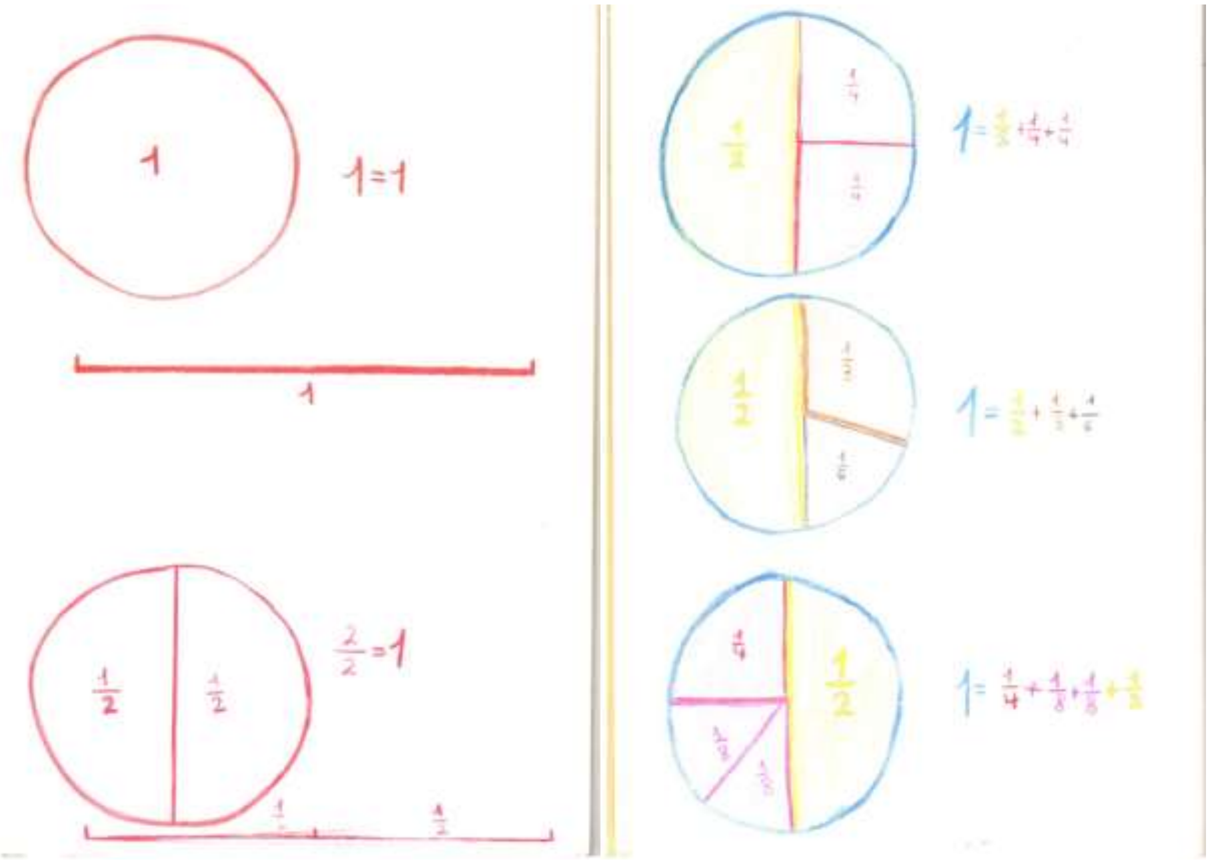


Abb. 6: Verschiedene Kreisteilungen und (additive) Gliederungen des Ganzen

Hat man eine andere Anzahl von gleichen Bruchteilen, so schreibt man entsprechend die Anzahl auf den Bruchstrich, während die Zahl unter dem Bruchstrich den Namen, also die *Art* der Bruchteile angibt. Beispiele sind:

1 Viertel wird geschrieben 1/4. Zwei Viertel werden geschrieben 2/4, drei Viertel 3/4, und wenn man sogar sieben Viertel-Äpfel auf dem Teller hat, schreibt man dies 7/4.

1 Drittel wird geschrieben 1/3. Zwei Drittel werden geschrieben 2/3, drei Drittel 3/3, und wenn man zum Beispiel vier Drittel Äpfel hat, schreibt man dies 4/3.

Die Zahl auf dem Bruchstrich *zählt* also die Bruchteile, die Zahl unter dem Bruchstrich *nennt* ihren Namen. Deshalb sagen wir zur Zahl auf dem Bruchstrich *Zähler* und für diejenige unter dem Bruchstrich *Nenner*. Der Zähler ist seiner Bedeutung nach also ein „Malnehmer“ (Multiplikator), während der Nenner den „Aufteiler“ oder „Einteiler“ (Divisor) bezeichnet, durch den die Einheit geteilt wurde:

Der Bruch 3/8 sagt uns also, dass wir das Ganze in 8 gleiche Anteile (mit dem Namen „Achtel“) aufgeteilt und davon dreimal genommen haben, also haben wir 3 „Achtelstücke“.

Hierzu werden nun eine Reihe halbmündlicher Übungen in zwei Richtungen durchgeführt. In der ersten Richtung lassen wir eine Anzahl gleicher Stammbrüche als gewöhnlichen Bruch schreiben, wie als Beispiele oben angegeben. In der zweiten Richtung schreiben wir Brüche an die Tafel und lassen sie von den Kindern lesen. Außerdem haben sie zu sagen, welche Zahl der Zähler und welcher der Nenner ist. Ich gebe einige Beispiele als Übung an, die aber frei fortgesetzt und unter Nachbarn selber gestellt werden können.

Übungen

1. Schreibe die folgenden Summen als Bruch:
   1/4 + 1/4 + 1/4 = ?   1/5 + 1/5 + 1/5 = ? 1/7 + 1/7 + 1/7 + 1/7 = ? …
2. Lies die Brüche und gib an, welches der Zähler und welches der Nenner ist:
   3/4; 5/3; 9/4; 2/17; 17/2; 63/8; 297/411.

Sind das Lesen und Schreiben von Brüchen gesichert, die gelernten Bezeichnungen ins Heft geschrieben und vielfältig geübt, können die ersten Additionen und Subtraktionen mit *gleichnamigen* Brüchen durchgeführt werden. Beispielsweise rechnen wir

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=\frac{3}{3};\quad \frac{1}{4}+\frac{2}{4}=\frac{3}{4}\ \text{ und so fort.}$$

Mit einfachen Übungen zum Addieren und evtl. sogar Subtrahieren für zu Hause beenden wir das Bruchrechnen für diesen Tag.

Der vierte Tag

Der vierte Tag dient zunächst der Sicherung und Vertiefung des bisher Behandelten. Da bei der Addition und Subtraktion von gleichnamigen Brüchen gegenüber dem Rechnen mit natürlichen Zahlen nichts Neues auftritt - es sind einfach die Zähler zu addieren bzw. zu subtrahieren, während der gemeinsame Nenner als Name beibehalten wird -, kann auf dieser Stufe das Bruchrechnen auch rasch auf größereZahlen ausgeweitet werden. Damit gewinnen die Kinder das Gefühl, schon etwas sicher zu beherrschen. Die Unterscheidung von *echten* und *unechten* Brüchen - bei den echten ist der Zähler kleiner als der Nenner, bei den unechten ist er gleich oder größer - ist hier noch nicht wichtig. Wir werden bei Besprechung der so genannten *gemischten* Zahlen darauf eingehen. In jedem Fall sind auch Brüche wie 5/4 ‘richtige’ Brüche, mit denen wir „ganz normal“ rechnen dürfen. Fünf Viertel Apfelstücke sind selbstverständlich – aus mehr als einem Apfel – so herstellbar wie drei Viertel eines Apfels.

Beispiele:

1/2 + 2/2 = 3/2
2/3 + 2/3 = 4/3
3/4 + 3/4 = 6/4
……………….

Die arithmetischen Betrachtungen werden also von vielfältigen Übungen zum *Bruchteilen* begleitet. Die langjährigen Erfahrungen der Kinder im Formenzeichnen, in denen auch die einfachen geometrischen Figuren behandelt werden, kommen hier den Kindern zugute. So kann man sie auffordern, in verschiedener Art eine Bruchbildung zeichnerisch darzustellen. Neben Einteilungen von Kreisen, Quadraten und Rechtecken sind auch gerade Strecken gut zu teilen. Recht anspruchsvoll und als Herausforderung für begabte Schüler gedacht sind Teilungen im Dreieck. Die Abb. 7 bis 9 geben einige unterschiedliche Beispiele für die zuletzt angegebene Rechnung.

Abb. 7 bis 9

(Selbst überlegen ccc)

Wichtig ist es, den Kindern ein Gefühl für die *Größenbeziehungen der Brüche* zu vermitteln. Bekannt ist die Scherzfrage: Möchtest du von einem Kuchen lieber $\frac{1}{100}$ oder $\frac{1}{3}$ haben? Es muss fester Besitz werden, dass das Hundertstel sehr viel kleiner als ein Drittel ist. Für die Stammbrüche ist dies einfach zu überschauen: Je *mehr* Teile ich aus derselben Einheit erzeuge, desto *kleiner* wird jedes Teil. Das führt zur Regel: *Ein Stammbruch ist umso kleiner, je größer der Nenner ist.*

XXX

Kann auf den folgenden Abschnitt (Blick auf Kehrwertbildung bzw. Inversion) hier ganz verzichtet werden? Für den Klassenlehrer (und die Kinder) ist er eher irritierend (mindestens in der 4.Klasse).

Hier gut überlegen, wie das Bild aussehen soll xxx

Die Beziehung zwischen den Vielfachen und den Bruchteilen einer Einheit kann man an einer Strecke veranschaulichen. In Abb. 10 sind von der Grundstrecke, die wir als Einheit betrachten, das Doppelte, Dreifach, Vierfache und die Hälfte, ein Drittel, ein Viertel, ein Fünftel und so weiter dargestellt. Nach außen verlängert sich die Ausgangsstrecke mit jedem Schritt um die gleiche Länge. Bei der Bildung der Bruchteile werden nach innen die Teilschritte immer kleiner. Wie die äußeren Teilpunkte unbegrenzt ins Unendliche fortschreiten, so können die inneren Teilpunkte nie den Anfangspunkt der Strecke erreichen. Er ist für diesen Teilungsprozess ein funktionell unendlich ferner Punkt.

Abb. 10 (Zeichnung fehlt noch) ccc

Solche Beziehungen zwischen der Verlängerung einer Strecke nach außen und der Unterteilung nach innen können in der vierten Klasse noch nicht Gegenstand des systematischen Unterrichts sein. Der Lehrer kann aber in einer Bemerkung auf solche Verhältnisse aufmerksam machen und auf den Oberstufenunterricht verweisen, wo die Kinder darüber mehr lernen werden.[20]

Eine eingefügte Schreitübung kann das Gemeinte veranschaulichen: Wir zeichnen dazu eine etwa 1 m lange Grundstrecke auf den Boden. Nach außen verlängern wir die Strecke mehrfach um ihre Länge, nach innen bilden wir Halbe, Drittel und Viertel. Dann stellen sich zwei Kinder an einem Ende der Strecke zunächst eng bei einander – eines innen und eines außen. Macht nun das äußere Kind einen Schritt mit der Länge der Strecke weg vom anderen Kind, dann hat es sie Strecke verdoppelt. Wenn das andere Kind nun die Strecke halbiert, geht es in das Innere; sie bewegen sich voneinander fort. Während das äußere Kind immer gleichmäßig weiterschreiten kann, wird das innere Kind immer langsamer. Können die Kinder das zuerst in einer Tafelzeichnung mit den beiden Zeigefingern und dann in einer Heftzeichnung nachvollziehen?[21]

Sehr anregend kann es auch sein, wenn ein Lehrer an einem Instrument im Vorblick auf die Akustik der sechsten Klasse die Beziehung der Bruchteile zur Musik zeigt. Spielt er ein Saiteninstrument, so kann er hören lassen, wie es tönt, wenn eine Saite um ein Viertel, ein Drittel oder ein Halbes verkürzt wird. Da viele Waldorfschülerinnen und Waldorfschüler in

[20] *Wenn* die Inversion am Kreis behandelt wird. Siehe aber vor allem die unten angegeben Übungen zum Bruchteilen.

[21] Hinweis auf Dur und Moll? Alg7-8 ccc

diesem Alter bereits anfänglich ein Streichinstrument spielen, kann man sie darauf hinweisen, wie sie mit den Fingern beim Spielen immer ganz flink Bruchteile bilden.[22]

Der fünfte Tag

Neben dem weiteren Festigen des Behandelten und den fortlaufenden Übungen zum Bruchteilen kann das *Erweitern* und *Kürzen* von Brüchen anfänglich eingeführt werden. Die beiden Prozesse können bildhaft eingeführt werden anhand der Alltagserfahrungen der Kinder. Geeignete Beispiele sind alle schüttbaren Materialien (Flüssigkeiten, Getreide, Zucker), die gerne mit Schöpfmaßen (z.B. Messbecher) bestimmt werden; aber auch Dinge, deren Gebrauch portioniert in unterteiltem Zustand erst sinnvoll wird, wie Kuchen, Pizza, Schokoladentafel, usw.: Wir können einen halben Kuchen „aufschneiden“ in 4 Achtelstücke (1/2 erweitern zu 4/8) und umgekehrt 4 Achtelstücke „zusammenschieben“ und sehen dann, dass sie zusammen gleich viel wie ein halber Kuchen sind.

Gerne übernehmen die Kinder ein farbiges Blatt (A4) vom Lehrer, das sie mit ihm gemeinsam falten. Darauf steht zunächst eine große „1“ auf der Vorderseite. Nun wird das Blatt zur Hälfte (auf A5) gefaltet, und die „1“ ist zugedeckt. Auf das umgeklappte halbe Blatt schreiben wir „1/2“, ebenso auf die freigelegte halbe Heftseite darunter (diese flächig einfärben). Das gefaltete halbe Blatt wird nochmals halbiert (A6) und mit ¼ beschriftet, ebenso auf das neu freigelegte Viertel der Heftseite. Das können wir fortsetzten über Achtel zum Sechszehntel. Die letzte verbliebene Rückseite wird in die Ecke einer Heftseite geklebt, so dass beim Auffalten das ganze farbige Blatt wieder diese Heftseite bedeckt. Die Faltung lässt dann das fortgesetzte Halbieren als Rechenkette erkennen:

1 = 2/2   ½ = 2/4   ¼ = 2/8   1/8 =2/16

Weil auch das Ganze stets sichtbar bleibt, kann es auch mit den neu erschienenen Teilen zusammengesetzt werden als:

1 = 2/2 = 4/4 =8/8 = 16/16   oder: ½ = 2/4 = 4/8 = 8/16   bzw.: ¼ = 2/8 = 4/16

[22] Auf die geringfügigen Abweichungen durch das Anpressen der Saiten auf das Griffbrett braucht hier wohl noch nicht eingegangen zu werden.

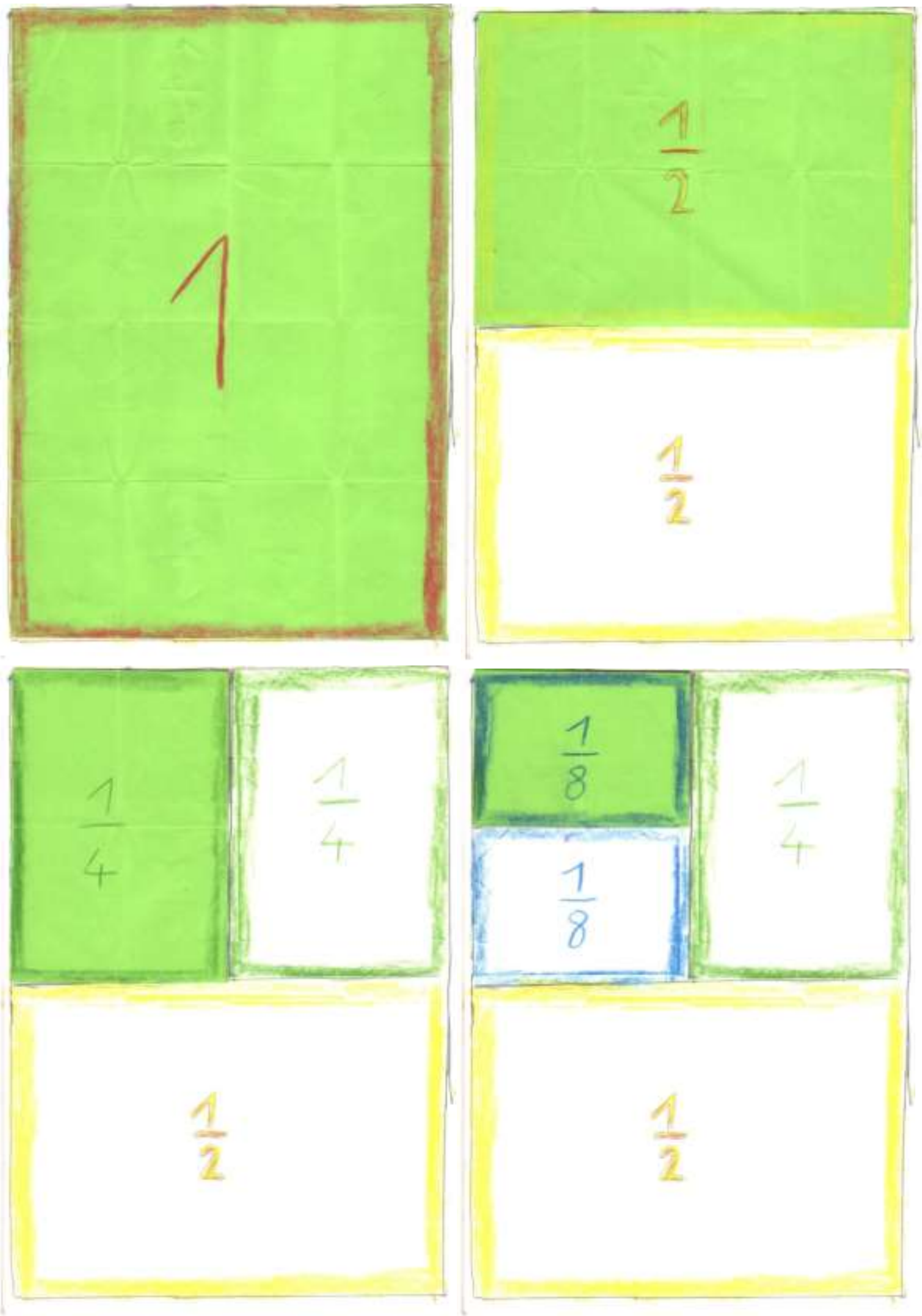


Abb. 10: Falten in Bruchteile

Ergänzend markieren wir in einer Einheit (Kreis, Quadrat, Dreieck oder Würfel), die wir schon in den vorangegangenen Übungen kennen gelernt haben, den halben Teil und teilen diesen feiner ein. Am leichtesten lassen sich die verschiedenen Unterteilungen am Kreis zeigen, den wir dazu viermal zeichnen. Den ersten teilen wir nur in zwei Hälften, den nächsten schon in Viertel, den dritten in Achtel und den letzten in Sechszehntel. Halbieren wir die Stücke, so haben wir doppelt so viele; dies zeigt der dann neue (=verdoppelte) Nenner an als Rückbezug zum ursprünglichen Ganzen.

In jedem Kreis unterlegen wir eine Hälfte farblich und beschriften die jeweils darin liegenden Stücke (Sektoren), deren Anzahl und damit der neue Zähler verdoppelt sich bei jeder Halbierung ebenfalls: Halbieren wir die Hälfte noch einmal, so erhalten wir 2/4. Bei einer weiteren Unterteilung erhalten wir 4/8 und so fort, trotzdem bleibt es natürlich immer das gleich große halbe Stück vom Anfang.

Wir können also schreiben

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8} = \frac{8}{16} = \ldots$$

und es die Schüler sogar weiter fortsetzen lassen.

Die Unterteilung verändert zwar das Gefüge des Ausgangsteiles, nicht aber die Gesamtmenge: Wie weit wir auch zum Beispiel ein Pizzastück unterteilen, die Gesamtmenge, welche wir essen können, bleibt dabei gleich. Wollen wir aber mit einem anderen Menschen teilen, so müssen wir in jedem Fall die Unterteilung vornehmen. Die Aufteilung ermöglicht uns, danach etwas auszuteilen.

Was erhält man, wenn man $\frac{1}{3}$ noch einmal halbiert? Um den Bezug eines der entstandenen Teile zum ursprünglichen Ganzen, auf das sich 1/3 bezieht, zu sehen, müssen wir uns jedes der drei Drittel, die das Ganze enthält, in zwei gleiche Teile unterteilt denken. Dann sind $3 \cdot 2 = 6$ Teile entstanden. Die Hälfte eines Drittels ist also $\frac{1}{6}$ des ursprünglichen Ganzen. Zwei davon haben wir durch die Unterteilung des Drittels erhalten. Wir können also schreiben

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$$

Unterteilen wir weiter, so erhalten wir die Reihe

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{4}{12} = \frac{8}{24} = \ldots$$

Wir können aber auch $\frac{1}{3}$ immer wieder *dritteln* und dann entsprechend 3mal mehr Teile erzeugen. So erhalten wir

$$\frac{1}{3} = \frac{3}{9} = \frac{9}{27} = \frac{27}{81} = \ldots$$

Was erhält man, wenn man $\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$ jeweils in zwei gleiche Teile unterteilt?

Das immer feinere Unterteilen beim Erweitern kann man recht schön an den Verzweigungen von Bruch-Bäumen anschaulich machen, die es allerdings in der Natur so nicht gibt:

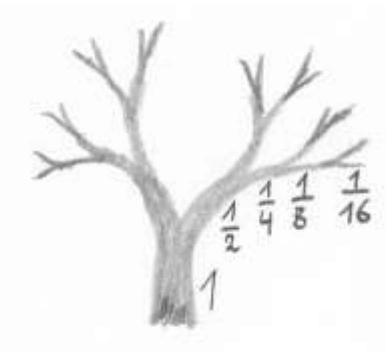


Abb. 11 a Der Zweitelbaum

Abb. 11 b Der Drittelbaum

Manchmal kann man Unterteiltes ohne Schwierigkeiten wieder zusammenfügen. Schieben wir 2 Viertel so eng zusammen, dass der Schnitt nicht mehr auffällt, so sehen die beiden Viertel wieder aus wie eine Hälfte. Selbst wenn die Trennung noch auffällig ist, so sind die beiden Viertel und ein ungetrenntes Halbe gleich groß. Noch besser gelingt diese Vereinigung mit Flüssigkeiten: Gießen wir zum Beispiel $\frac{1}{4}$ Liter Wasser und noch $\frac{1}{4}$ Liter Wasser im Messbecher zusammen, so zeigt dieser danach $\frac{1}{2}$ Liter an:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

Auch bei anderen Dingen bleibt beim Unterteilen die Gesamtmenge des Stoffes gleich viel oder gleich groß. Auf diese Konstanz richtet sich also der Blick beim Bruchrechnen, wenn von einer Gleichheit zweier unterschiedlicher Brüche gesprochen wird. (Siehe die folgende Zwischenbemerkung.)

Auch wenn wir an diesem Tag mit der Klasse noch nicht zu einer allgemeinen Formulierung der Benennungen „Erweitern“ und „Kürzen“ sowie der Rechenregeln dazu gelangen, lassen wir aber doch erleben, wie im ersten Fall ein analytischer, im zweiten Fall ein synthetischer Prozess abläuft. Beim Erweitern gehen wir zu immer feineren *Unterteilungen* über, wir *erweitern* unseren Blick auf alle möglichen feineren Details. Beim Zusammenfügen schauen wir die Vielzahl der Teile überblickend an; wir vereinfachen und *kürzen* die Bezeichnung, indem wir *Teile zusammenfassen.* Bei den Übungen dazu werden wir aber regelmäßig daran erinnern, dass die Menge oder Größe dabei immer gleich bleibt.

Übungen zum Erweitern und Kürzen

In den folgenden Übungsgruppen beginnen wir sehr einfach, damit möglichst alle Kinder mitgenommen werden. Vieles kann auch einfach im mündlichen oder halbschriftlichen Rechnen gelöst werden. Die Ergebnisse sollten nicht nur hingeschrieben, sondern immer auch laut vorgelesen werden. Beispiele: 3 = 6/2, gelesen: 3 ist gleich 6 Halbe. Oder 6/2 = 3, gelesen: 6/2 sind 3 Ganze.

1. Gliedere in Halbe:
   1 = ?   2 = ?   3 = ?   4 = ?   5 = ?   6 = ?   7 = ?   10 = ?
2. Fasse in Ganze zusammen:
   2/2 = ?   4/2 = ?   6/2 = ?   8/2 = ?   10/2 = ?   20/2 = ?   40/2 = ?   100/2 = ?
3. Verwandle in Viertel:
   1 = ?   2 = ?   3 = ?   4 = ?   5 = ?   6 = ?   7 = ?   10 = ?
4. Fasse so weit wie möglich zusammen:
   4/4 = ?   6/4 = ?   8/4 = ?   9/4 = ?   10/4 = ?   11/4 = ?   12/4 = ?   36/4 = ?
   4/6 = ?   4/8 = ?   4/9 = ?   4/10 = ?   4/11 = ?   4/12 = ?   4/36 = ?   4/28 = ?
5. Verwandle in Achtel:
   1 = ?   2 = ?   3 = ?   4 = ?   5 = ?   6 = ?   7 = ?   10 = ?
6. Kürzen ist nicht immer möglich, manchmal aber sogar mehrfach:
   2/8 = ?   3/8 = ?   4/8 = ?   5/8 = ?   6/8 = ?   7/8 = ?   8/8 = ?   10/8 = ?
   12/8 = ?   24/8 = ?   40/8 = ?   44/8 = ?   48/8 = ?   50/8 = ?   88/8 = ?   100/8 = ?
   8/2 = ?   8/3 = ?   8/4= ?   8/5 = ?   8/6 = ?   8/10 = ?   8/12 = ?   8/16 = ?
   8/20 = ?   8/24 = ?   8/40 = ?   8/60 = ?   8/80 = ?   8/84 = ?   8/88 = ?   8/120 = ?
7. Verwandle in Drittel:
   1 = ?   2 = ?   3 = ?   4 = ?   5 = ?   6 = ?   7 = ?   10 = ?
8. Verwandle in Ganze:
   3/3 = ?   6/3 = ?   9/3 = ?   12/3 = ?   21/3 = ?   42/3 = ?   48/3 = ?   51/3 = ?
9. Vereinfache so weit wie möglich:
   2/6 = ?   3/6 = ?   4/6 = ?   5/6 = ?   6/6 = ?   18/6 = ?   6/18 = ?   6/42 = ?
   12/18 = ?   18/12 = ?   9/30 = ?   30/9 = ?   24/42 = ?   42/24 = ?   27/36 = ?   36/72= ?

10. Verwandle in Achtel: ½ ¾ ¼ 5/4 3/2

11. Verwandle in Zwölftel:

1/2 = ?/12 1/3 = ?/12 1/4 = ?/12 1/6 = ?/12 2/3 = ?/12 3/4 = ?/12 5/6 = ?/12

12. ccc

Zwischenbemerkung

Für den Lehrer kann die folgende Überlegung hilfreich sein, um sich einiges hier zugrunde Liegende begrifflich bewusster zu machen: Wenn ich sage,

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

dann ist dies offensichtlich nicht immer richtig. Zwei halbe Tassen sind nicht eine ganze Tasse sondern eine kaputte. Das Wort „ganz“ impliziert für die Kinder auch „heil“, im Sinne von unverletzt, unbeschädigt. Bruchrechnen macht also nur Sinn mit Größen, bei denen die Unterteilung nicht zugleich eine Funktions- oder Wesensänderung mit sich bringt. Die Teile müssen neutral gegenüber dem Unterteilen sein.[23]

Aber auch dann ist eine unterteilte Größe nicht identisch mit der ursprünglichen. Ein Balken von vier Meter Länge ist durchaus verschieden von vier Vierteln dieses Balkens, die nur noch sehr eingeschränkt zum Bauen tauglich sind. Dies wird aber durch die mathematische Gleichheit auch nicht behauptet. Sie meint nur eine Gleichheit in Bezug auf einen im Zusammenhang eindeutig erfassten Kontext. So ist ein Mensch mit vielen anderen im Hinblick auf seine Konfession gleich, unter anderen Aspekten aber völlig ungleich. Am Beispiel des Balkens meint die Gleichheit die Gesamtlänge, unabhängig von ihrer Unterteilung. In manchen Sägewerken wird beim Kauf von Balken der Preis nur für die Gesamtlänge - bei gleichem Querschnitt - berechnet. Vier 1m-Stücke kosten also gleich viel wie ein 4m-Stück. Die Abrechnung erfolgt - bei gleichem Querschnitt - nach „laufenden Metern“ ohne Rücksicht auf die Länge der Einzelteile, wobei sehr kurze Stücke als Abfall „abverkauft“ werden.

Vor den Schülern betonen wir *zuerst* die *Verschiedenheit* des Ganzen und seiner Unterteilung, ehe wir auf den Aspekt hinweisen, unter dem beides als gleich zu betrachten ist. Das können wir im Sprachgebrauch berücksichtigen, indem wir das Ganze im Vergleich zur Summe der Bruchstücke „gleich viel“, „gleich schwer“, „gleich groß“, usw. nennen, statt nur „ist gleich“ zu sagen: Das Ganze und seine Unterteilung sind in ihrer Erscheinung - und damit oft auch in ihrer Funktion - verschieden, in der Gesamtmenge aber gleich. Durch das Erweitern und Kürzen können wir unterschiedliche Bruchformen erreichen, die alle dieselbe Gesamtmenge beschreiben. Wenn wir also die Vorgänge rein zahlenmäßig betrachten, ändern wir keine Größe, sondern nur die Form. Bildhaft gesprochen geben wir beim Erweitern und Kürzen dem Bruch ein anderes Gewand, mit dem wir ihn neu einkleiden.[24]

---

[23] In der rein mathematischen Behandlung werden häufig die rationalen Zahlen (Brüche) als Äquivalenzklassen geordneter Zahlenpaare eingeführt, wobei die Äquivalenzklassenbildung gerade alle Brüche identifiziert, die durch Erweitern oder Kürzen aus einander hervorgehen. Auf der hier behandelten Stufe handelt es sich noch um *inhaltliche* Begriffsbildungen, deren Formalisierung erst viel später zur Diskussion steht. Zunächst muss inhaltlich klar sein, was später einmal formalisiert werden kann. Vgl. auch Ernst Schuberth, Die Modernisierung des mathematischen Unterrichts, Stuttgart 1971 **(?), Kapitel XXXX ccc**

[24] In der rein mathematischen Behandlung werden häufig die rationalen Zahlen (Brüche) als Äquivalenzklassen geordneter Zahlenpaare eingeführt, wobei die Äquivalenzklassenbildung gerade alle Brüche identifiziert, die durch Erweitern oder Kürzen aus einander hervorgehen. Auf der hier behandelten Stufe handelt es sich noch um *inhaltliche* Begriffsbildungen, deren Formalisierung erst viel später zur Diskussion steht. Zunächst muss inhaltlich klar sein, was später einmal formalisiert werden kann. Vgl. auch Ernst Schuberth, Die Modernisierung des mathematischen Unterrichts, Stuttgart 1971 **(?), Kapitel XXXX ccc**

Selbstverständlich dozieren wir dies nicht in philosophischer Breite und Tiefe, aber mit wenigen Worten lässt sich über die Gleichheit und Ungleichheit etwas Wesentliches sagen. Wenn man berücksichtigt, wo das Bruchrechnen wirklichkeitsgemäß ist, und wo es das nicht ist, dann kann man nun die allgemeine Regel für das Erweitern und Kürzen formulieren und aufschreiben:

Regel zum Umwandeln von Brüchen:

> *Ein Bruch wird erweitert, indem man Zähler und Nenner mit derselben Zahl multipliziert. Man erhält so eine feinere Untergliederung.*
>
> *Ein Bruch wird gekürzt, indem man Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl dividiert. Man fasst dadurch eine feinere Untergliederung zu einer gröberen zusammen.*
>
> *Der Wert eines Bruches wird nicht geändert, wenn man ihn erweitert oder kürzt.*

Vor dem Ende der Woche schauen wir noch einmal auf das Gelernte zurück und gehen in Gedanken jeden wesentlichen Schritt noch einmal durch.

Ccc Kann man hier oder auf einer CD das Epochenheft I von Frau Andermann einfügen?

Übungen zum Bruchteilen in der 4. und 5. Klasse

Der Unterricht zum Bruchrechnen begleiten wir mit regelmäßig eingeschobenen Übungen zum Bruchteilen und illustrieren dies mit unterschiedlichen Veranschaulichungsformen; dabei achten wir, dass die Brüche sich nicht an eine einzige Darstellungsform, auch nicht des Kreises, binden. Brüche bilden heißt nicht, eine eingeübte feste Vorstellungsform zu erinnern, sondern die Fähigkeit zu entwickeln, in den unterschiedlichsten Verhältnissen die *Tätigkeit* des Bruchteile-Bildens ausüben zu können. Brüche gehören dem arithmetisch-algebraischen Gebiet der Mathematik an, nicht der Welt der räumlichen Formen.

Da es aber schwierig wäre, ohne die Bezüge zu solchen Formen das Bruchrechnen verständlich zu machen, streben wir einen vielfältigen Wechsel der Veranschaulichungen an. Die Variation der möglichen Anschauungen soll den Kindern helfen, den gemeinsamen Kern der Sache in sich selbst als *internes Bild* heraus zu schälen. Dieses trägt dann den Wahrheits- und Erkenntnisgehalt in sich, unabhängig von festen äußeren Abbildungen.

Bei aller angestrebten Vielfalt werden wir dennoch dem Kreis – mit der vertrauten Kuchen- bzw. Tortenteilung[25] – einen gewissen Vorzug einräumen. Seine Bruchteile deuten durch die Krümmung des verbliebenden Randes stets den (fehlenden) ganzen Kreis an: Im Bilde bleibt der Rückbezug vom Teil auf das ehemalige Ganze sichtbar erhalten.

Die folgenden Übungen geben dazu einige grundlegende Beispiele, die vom Lehrer selbst phantasievoll variiert oder ergänzt werden können. Wir erläutern dabei einige Beispiele genauer, um auf ihren jeweiligen Stellenwert aufmerksam zu machen.

1. Auf das Unterteilen einer Tonkugel haben wir bereits aufmerksam gemacht. Hier wird besonders anschaulich, wie die Volumenverhältnisse mit der zunehmenden Zahl der Teile sich verändern.

2. Auf die Verwendung eines Würfels, der aus Plastilin oder Ton hergestellt werden kann, wurde durch Rudolf Steiner in dem einleitend angeführten Zitat hingewiesen. Der Würfel hat den Vorteil, dass leicht kongruente Teile hergestellt werden können, dabei das räumliche Vorstellen geschult wird und sehr rasch eine größere Anzahl von Teilen entsteht. Anregend kann es auch sein, einen Plastilinwürfel nicht nur wiederum in kleinere Würfel, sondern auch in Pyramiden oder prismatische Säulen zu zerlegen, die wiederum gleiche Bruchteile in neuer Form darstellen.

3. Es können Bruchteile von einem Volumen Wasser gebildet werden. Füllen wir das zunächst in eine Glaskanne gegebene Wasser in fünf gleich geformte Gläser, so dass der

[25] Kuchen werden üblicherweise in 12 Sektoren, Torten oft in 16 eingeteilt

Wasserstand überall gleich hoch ist, so enthält jedes Glas ein Fünftel des ursprünglichen Volumens.[26]

4. Durch das Falten von Papier können eine Vielzahl von Bruchteilen erzeugt und ausgeschnitten werden.

5. Unterteile ein Quadrat auf möglichst viele verschiedene Arten in vier gleiche (gemeint sind kongruente) Teile. Es sollen mindestens fünf unterschiedliche Unterteilungen gefunden werden. Einige Beispiele sind im Folgenden angegeben. Man sollte sie *nicht* den Kindern vorgeben, weil sich wunderbare Entdeckungen und Gespräche darüber in der Klasse selbst ergeben können.[27]

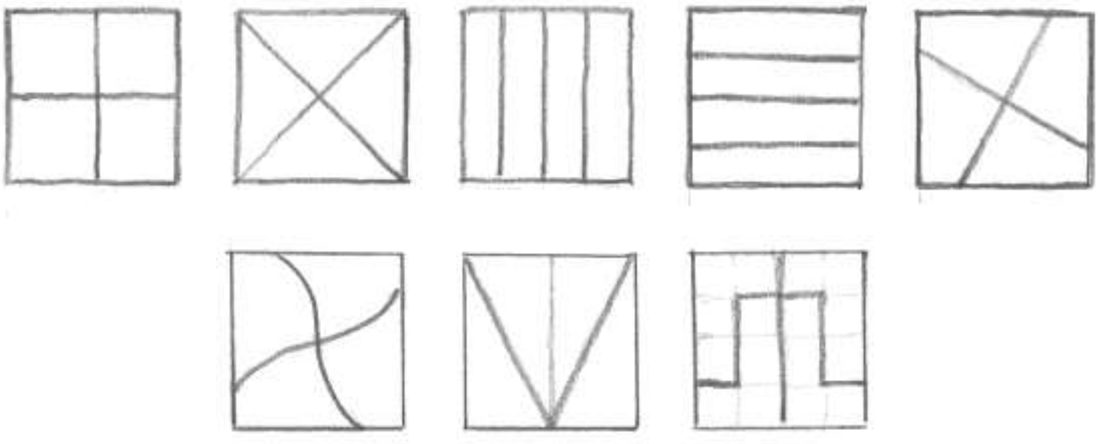


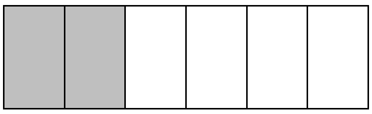
Abb. 12: Vielfalt der Quadrat-Teilungen

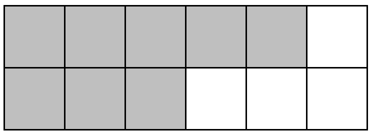
[Hier auch die Beispiele aus meinem handschriftlichen Manuskript, S.2 einarbeiten ccc]

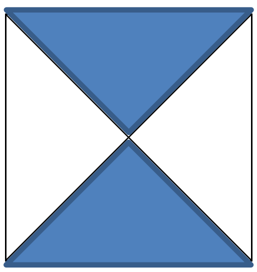
6. a) Zeige andere Bruchteile am Quadrat (Drittel, Fünftel usw.)

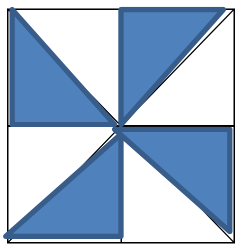
   b) Unterteile andere Vierecksformen (Rechtecke, Rauten) in gleiche Teile.[28]

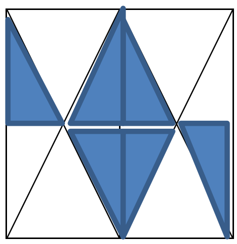
7. Bestimme den Anteil der eingefärbten Flächen als Bruch

a) 

b) 

c)
e) 

d) 



8. Unterteile[29] ein Quadrat, indem du mit einer Diagonalen beginnst, ein Teildreieck (durch die Höhe) wiederum halbierst, eines der entstandenen Teildreiecke wiederum

[26] Die Versuche von Piaget zur Invarianz von Quantitäten – hier: Mengenkonstanz trotz Umschüttens oder Ausbreitens in mehrere Gefäße – zeigten, dass Kinder eine gewisse Reife brauchen, bis sie diese Einsicht allgemein übertragen können.

[27] Vergleiche auch Peter Büchi, xxx

[28] Siehe das Haus der Vierecke im Band 2 der Reihe Der Geometrieunterricht an Waldorfschulen. Vergleichende Formenlehre und geometrische Grundkonstruktionen in den Klassen 4 und 5, Stuttgart 1998

halbierst und so fort. Welche Bruchteile vom ursprünglichen Quadrat stellen die einzelnen Dreiecke dar? (Abbildung 13)

9. Welche Teile von einem gleichseitigen Dreieck entstehen, wenn fortlaufend die Seitenmitten miteinander verbunden werden und so immer kleinere Dreiecke ineinander geschachtelt entstehen? (Abbildung 14)

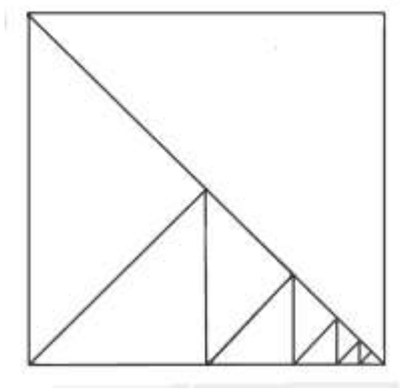


Abb. 13

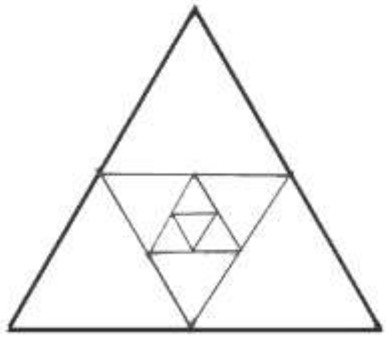


Abb. 14

10. Zeichne ein *gleichseitiges* Dreieck (nicht nur gleichschenklig!) und unterteile es auf möglichst verschiedene Arten in gleiche Teile. Welche Bruchteile findest du?

11. Eine Kindergruppe von 12 Kindern wird aufgestellt. Ein Bruchteil, der passend ist, wird genannt, und die Kinder ordnen sich rasch entsprechend um. Zum Beispiel sagt jemand: Drittel – und dann ordnen sich die 12 Kinder rasch in 3 Gruppen von je 4 Kindern um. Andere Gruppengrößen zeigen weniger (z.B. bei 8; 9; 15 Kindern) oder mehr (z.. 24; 30; 32; 36 Kinder) Teilungsmöglichkeiten.

12. In der Klasse oder im Freien wird eine Strecke abgesteckt (zum Beispiel durch zwei aufgestellte Kinder). Stelle dich so, dass $\frac{1}{2}$ oder $\frac{1}{3}$ oder ..... entstehen.

13. An der Tafel wird eine Strecke gezeichnet, von der Kinder verschiedene Bruchteile anzeigen.

14. Der Lehrer zeigt mit seinen beiden Händen eine Strecke. Ein vor ihm stehendes Kind zeigt zum Beispiel $\frac{1}{3}$ an. Nun verringert oder vergrößert der Lehrer den Abstand seiner Hände und das Kind versucht, immer mit seiner Hand bei einem Drittel zu bleiben. Hält der Lehrer eine seiner Hände ruhig, so muss das Kind der Bewegung der anderen Hand verlangsamt folgen. Ein anderes Kind könnte außen auch die Strecke immer verdreifachen.

Die vorangehenden Aufgaben haben gemeinsam, dass es sich bei aller Verschiedenheit in den Dimensionen (dreidimensional, zweidimensional, eindimensional) um *räumliche* Größen handelt, deren Unterteilung die Brüche darstellen. In der folgenden Übung gehen wir auf Bewegungen ein, die in ihren Geschwindigkeitsverhältnissen Bruchteile entstehen lassen.

15. Zwei Kinder werden an den Anfang einer abgesteckten Strecke aufgestellt und üben zunächst nach dem gleichmäßigen Klatschen durch den Lehrer oder dem Anschlagen eines Tamburins $\frac{1}{2}$ so schnell, $\frac{1}{3}$ so schnell, $\frac{1}{4}$ so schnell ... zu gehen; das heißt, sie gehen zunächst auf jeden Schlag einen Schritt, dann auf zwei Schläge einen Schritt und so weiter. Dabei behalten sie immer die gleiche Schrittgröße bei. So werden sie immer langsamer. Wenn die Kinder sich auf diese Art eingegangen haben, beginnen sie

[29] Beispiele 8 – 10 sollten gemeinsam mit dem Lehrer an der Tafel entwickelt werden; (8) könnte auf Anfang 2. Woche verschoben werden, wo es nochmals vorkommt.

gemeinsam so, dass jetzt das eine Kind nach dem Grundrhythmus geht, das andere $\frac{1}{2}$ so schnell, $\frac{1}{3}$ so schnell und so fort. Die Bruchteile werden im Verhältnis der Geschwindigkeiten anschaulich. Bleiben sie stehen, so zeigen die zurückgelegten Strecken ebenfalls den betreffenden Bruchteil an.

Als Variation bietet sich an, Strecke und Zeit gemeinsam zu teilen. Ein großer, aber schreitfähiger Takt wird angeschlagen und eine überspringbare Strecke bezeichnet. Der größte Schüler (oder ein Erwachsener) darf als „Pferd“ dazu seine größte Strecke in einem Schritt bzw. Sprung vorgeben und dazu die Zeit dafür als Takt. Nun kommt ein zweiter Schüler dazu, der als „Hund“ im halben Takt und halber Schrittweite gemeinsam mit dem Pferd die Strecke überwindet. Dann darf noch eine „Katze“ mitmachen mit Viertel-Takt und –Schritt. Ob noch eine „Maus“ mit Achteln mithalten kann? Mit Geschick sind natürlich auch andere Bruchteile dazwischen möglich. Noch stärker das Zeitliche betonend ist die folgende Übung:

16. Der Lehrer oder ein Kind schlagen einen Grundrhythmus auf dem Tamburin. Ein anderes Kind schlägt doppelt, dreimal, viermal..... so schnell. Die Dauer zwischen zwei Schlägen von ihm sind Bruchteile der Dauer zwischen den Schlägen des Grundrhythmus: 1/1; 2/2; 3/3 (Triolen); 4/4; 6/6 (Triolen auf 1/2). Hiermit knüpft man an die Erlebnisse der Kinder im Musikunterricht an. Die entsprechenden Notenwerte erschienen im Bild als Bögen, die Gliederung in zeitliche Längen spiegelt sich in Form von räumlichen Längen.

Generell regen musikalische Rhythmen in Begleitung von Melodie und Harmonie innere Bewegung an; seelische Beweglichkeit antwortet der äußeren (Rechen-)Tätigkeit: „*Wie die Musik als reine Seelenkunst wahrhaftig ein im erlebenden Gefühl traumhaft-bewusstes Rechnen ist, so darf auch das ins helle Bewusstsein hinauf gehobenes Rechnen der musikalischen Tönung nicht entraten.*[30]“ Die Querverbindung zur Musik ist so naheliegend, dass auf entsprechendes Liedgut nicht verzichtet werden kann. Als treffendes Beispiel sei der Uhrenkanon genannt mit entsprechender Taktung: „Große Uhren gehen tick – tack (halbe Noten), kleine Uhren gehen ticke – tacke (Viertelnoten), und die kleinen Taschenuhren ticke-tacke – ticke-tacke (Achtelnoten)“.

[30] E. Bindel: Das Rechnen, S.70

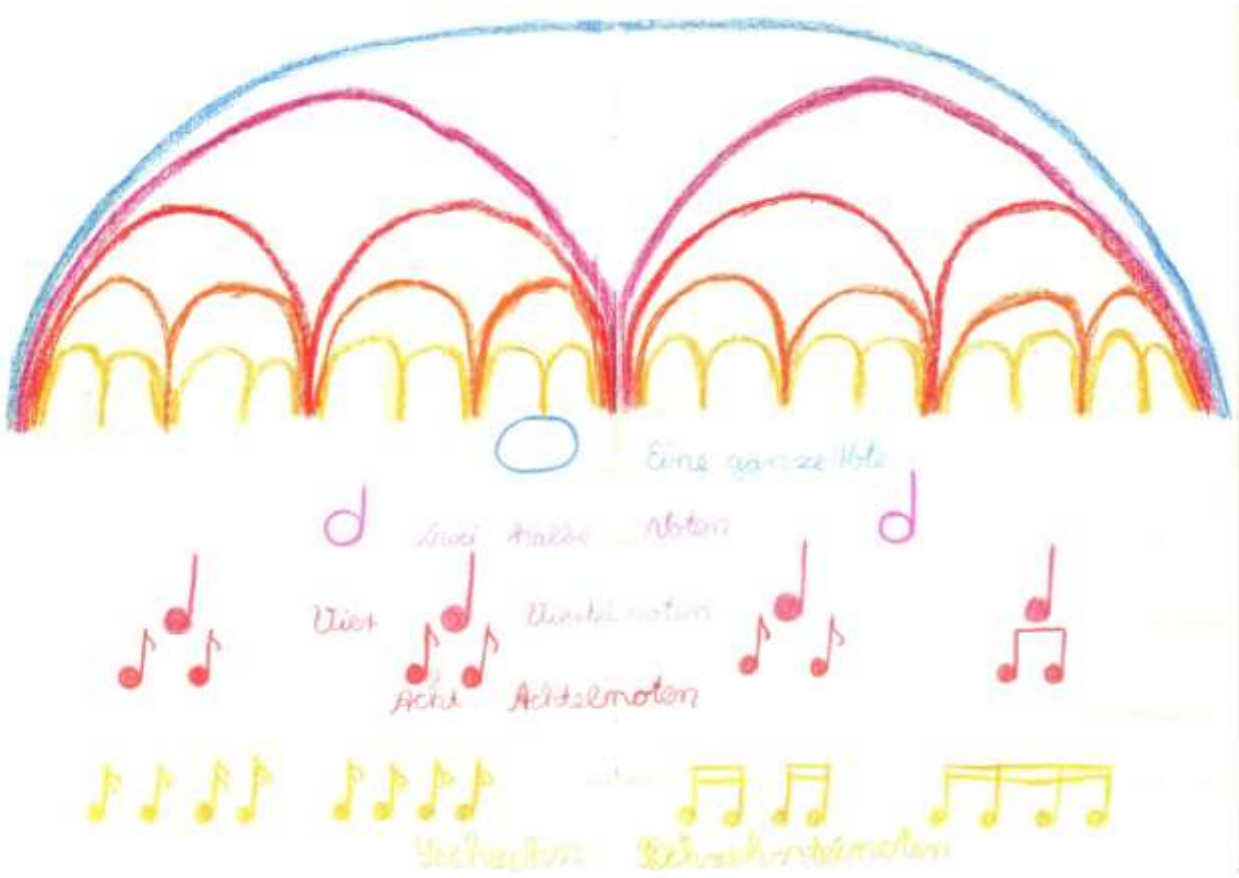


Abb. 15: Gliederungen der ganzen Note

Neben den räumlichen, bewegungsmäßigen und zeitlichen Übungen zum Bruchrechnen spielen auch die *Bruchteile von Zahlen* eine wichtige Rolle. Damit wird den Brüchen zugleich der Charakter von Bearbeitern (*Operatoren* oder *Rechenbefehlen*) gegeben, die für das Multiplizieren und Dividieren von Brüchen von besonderer Bedeutung sind. Da in der reinen Mathematik empirische Größen keine Rolle spielen, wird dieser Aspekt noch entsprechend ausgearbeitet. Wir können aber die Bildung von Bruchteilen einer Zahl vorbereiten, indem wir fragen: Wie groß ist *der Teil von*, beispielsweise

17. Was ist die Hälfte von 24, was ein Viertel, was ein Achtel?

Ob solche Fragen fortsetzbar sind mit ein Drittel oder ein Sechstel, hängt vom Rechenfortschritt ab und kann jederzeit im Kopfrechen wiederholt oder ergänzt werden. Sie sind die Umkehrung zu den Fragen: Von welcher Zahl ist 24 das Doppelte, das Dreifache, das Vierfache, das Sechsfache?

Die zweite und dritte Woche

Die Addition ungleichnamiger Brüche

In der zweiten Woche wenden wir uns dem wohl schwierigsten Teil der Bruchrechnung zu: der Addition und Subtraktion ungleichnamiger Brüche. Zunächst weisen wir mit geeigneten Beispielen erneut darauf hin, dass man nur gleichartige Dinge zusammenzählen (= gemeinsam zählen) oder abziehen (= wegnehmen) kann. Die Dinge müssen vergleichbar sein, also den gleichen Namen tragen.

Bei Brüchen ist dies der Nenner, der dann gemeinsam sein muss. Ist dieser Gleichklang, diese Übereinstimmung im Namen erreicht, so sind Addition und Subtraktion nur noch gewöhnliche Rechenvorgänge wie bei normalen ganzen Zahlen: 3 Achtelstücke und 1

Achtelstück werden wie gewöhnliche (ganze) Dinge – hier mit dem Namen Achtelstücke – zur neuen Anzahl 4 Achtelstücke[31] addiert.

Das Problem ist also nicht die Addition selbst, sondern die Vorbereitung, um diese zu ermöglichen. Deswegen legen wir großes Gewicht auf vielfältige Erlebnisse, Bilder und Beispiele, mit denen sich die Kinder die Begriffe *gemeinsamer Nenner* und *gleichnamig machen* erobern können. Das wichtigste Werkzeug dazu steht bereit: Erweitern und Kürzen. Neu ist dagegen die Frage: „Womit soll ich erweitern oder kürzen, damit meine Rechnung lösbar wird?“ Begleitend werden aber auch immer wieder Übungen zum Bruchteilen durchzuführen sein, wofür sich auch das mündliche Kopfrechnen eignet.

Wir werden im Folgenden nicht mehr einen möglichen täglichen Aufbau vorschlagen, sondern kontinuierlicher die Hauptpunkte des sachlichen Aufbaus schildern, die dann – wie in der Einleitung für allen Unterricht hervorgehoben – in Abhängigkeit vom Lehrer und seiner Klasse zu verwirklichen sind.

Ausgangspunkt für die Addition - im analytischen Sinn - kann folgende Frage sein: Kann ein Ganzes auch in *unterschiedliche* Bruchteile gegliedert werden? Teilen wir beispielsweise einen Kreis in zwei Hälften und die eine Hälfte in zwei Viertel, so erhalten wir $1 = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$. Dies kann natürlich auch mit einer Strecke, einem Rechteck oder auf andere Weise gezeichnet werden:

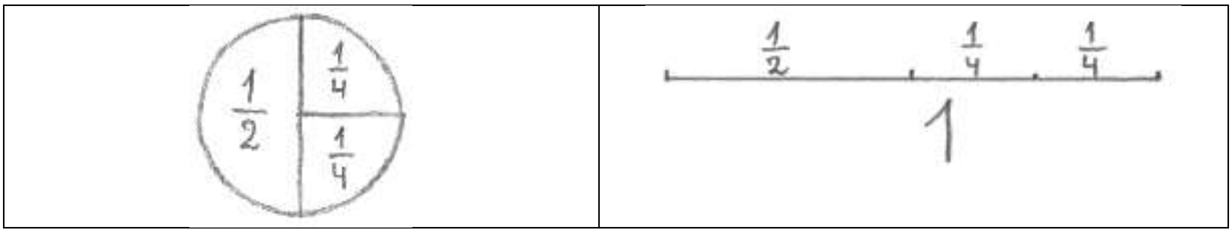


Abb.16a und 16b

Fügt man umgekehrt die Teile wieder zusammen, so erhält man wiederum ein Ganzes:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}+\frac{2}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

Die Kinder können nun selber eine Vielzahl solcher Unterteilungen vorschlagen und aufschreiben. Zur Veranschaulichung können immer wieder neue Formen aber auch Anzahlen oder gelegte Figuren verwendet werden.

Mit der Analyse des Ganzen und deren anschließender Synthese haben wir die ersten Schritte zur Addition ungleichnamiger Brüche getan. Wie wir oben die Einheit in Halbe und Viertel zerlegt haben, können wir die Zeichnung wiederholen und dabei die zweite Hälfte dritteln zu 3 Sechsteln und damit die Einheit in folgender Weise zerlegen.

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}$$

Wollen wir diese Zerlegung wieder zusammenfügen, so addieren wir zunächst die gleichnamigen Brüche

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}+\frac{3}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

Dabei haben wir den Bruch $\frac{3}{6}$ mit der Zahl 3 gekürzt und erhalten $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

Nachdem wir uns eine Zeitlang mit solchen einfachen analytischen und synthetischen Additionsvorgängen beschäftigt und in unterschiedlicher Weise veranschaulicht haben, fragen

[31] Dieses Vorgehen können wir bezeichnen als „quasi-kardinal“ = wie mit ganzen (Kardinal-)Zahlen

wir nun nach der Addition zweier Brüche, die zusammen nicht ein Ganzes ergeben. Wie viel ist $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$?

Auf keinen Fall sollte man gestatten, dass die Kinder unbedachte Vorschläge hinausrufen und irgendetwas „raten“. Das Beste ist, wenn die Klasse verstummt, weil sie erlebt, dass sich einer Lösung ein Widerstand entgegenstellt. Die beiden Größen können nicht ohne weiteres addiert werden, weil sie zu unterschiedlich sind. Wie man Öl und Wasser nicht ohne weiteres mischen kann, so kann man auch diese beiden Brüche nicht einfach addieren. Es ist gut, wenn in den Kindern das Gefühl einer *Dissonanz* entsteht.

Addieren können wir nur Brüche mit gleichem Nenner. Die beiden Brüche $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ sind einander *fremd*.

Wieder ist es möglich, an unterschiedlichen Veranschaulichungen den Kindern einen Ansatz zur Lösung zu bieten.

Auf dem Papier (Text u. Zchn.) sieht es leicht aus. Praxis: 1/3 der Strecke ist vom Anfang (oder Ende) leicht einzuteilen, nicht aber von der Mitte aus (dort sieht 1/3 der ganzen Strecke eher nach 2/3 des Restes aus!); die Frage nach dem kleinen Schritt, mit dem 1/2 und 1/3 getroffen wird, kann die Lösungsstrategie verfälschen: Hier ist nämlich der – auf die beiden Teilen passend – zu suchende Kleinschritt „zufällig“ der verbleibende Rest (=1/6) zum Ganzen!

Mögliche Verbesserungen:

a) Die Länge mit Schnur abmessen, sie in 2 bzw. 3 Teile falten und jeweils die Länge auf den Boden übertragen.

b) Oder auf dem Boden die Halbierung und Drittelung markieren, vom einen Ende das Halbe und vom anderen Ende das Drittel verschieden farbig, dann bleibt ein Rest „neben der Mitte“, mit dem das Ganze gefüllt würde. Dieser Rest deutet bereits das „halbe Drittel“ als Lücke an. Die unten genannten Schritte lassen sich übertragen.

Erster Weg:

Stellen wir das Ganze durch eine Strecke dar und markieren auf ihr nacheinander $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$, so bleibt ein Reststück, dessen Größe uns zunächst noch unbekannt ist. Am besten wird eine Zeichnung auf den Fußboden und als Abbild davon auf die Tafel gemacht. Die Gesamtlänge auf dem Boden sollte etwa 1,8m sein. Sind die Teilpunkte von einem Halben und *anschließend* einem Drittel der Gesamtstrecke markiert, so kann man ein Kind auffordern, die Strecke so zu durchlaufen, dass es nur diese Teilpunkte betritt. Dann merkt es, wie die Schrittlängen ganz unterschiedlich sind: Erst wird ein großer Schritt gemacht (90cm), dann ein kleinerer (60cm) und schließlich ein ganz kleiner (30cm). *Kann man die Strecke so durchlaufen, dass man lauter gleiche Schritte macht und dabei auch auf die eingezeichneten Teilpunkte gelangt?* Welchen Bruchteil vom Ganzen besitzt die Schrittlänge?[32]

An der Tafel kann man die Strecke, die sowohl in $\frac{1}{2}$ wie in $\frac{1}{3}$ (und in den Rest) passt, zunächst mit der Handspanne abschätzen lassen. Man erhält eine Länge, die ein Drittel des Halben und zugleich ein Halbes des Drittels ist. Dieses *gemeinsame Maß* ist in diesem Fall zugleich die Länge der Reststrecke. Der Bruch $\frac{1}{6}$ füllt zugleich das $\frac{1}{2}$ als $\frac{3}{6}$ und das $\frac{1}{3}$ als $\frac{2}{6}$ aus. Deshalb ist

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{6}{6}$$

[32] Siehe auch Erweiterung II, Seite ccc

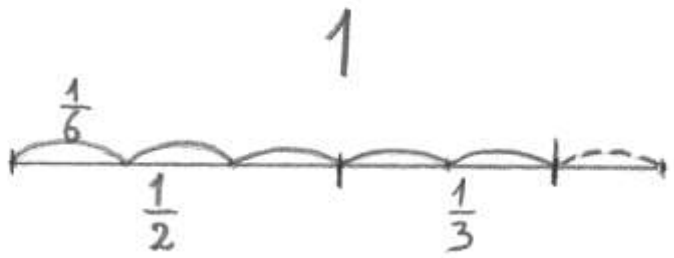


Abb.17: Halbe plus Drittel einer Strecke

Das ist ein wunderbares Ergebnis, das ganz aus dem rhythmischen Erleben gewonnen werden kann! Unvergesslich ist mir eine Förderstunde, in der ein Mädchen plötzlich das Harmonisieren der unterschiedlichen Längen durch ein gemeinsames Maß einsah und strahlend hell aufleuchtete.

Zweiter Weg:

Eine zweite Möglichkeit, die allerdings weniger dynamisch auf den Messprozess hinweist als das Abschreiten einer Strecke, bietet sich mit dem Kreis an. Wir heben an ihm eine Hälfte und ein Drittel der Kreisfläche hervor. Wie kann man die Gesamtfläche als Bruchteil der ganzen Kreisfläche ausdrücken? Es wäre schade, die Lösung rasch den Kindern mitzuteilen. Dadurch würde ihnen die Entdeckerfreude genommen. In der Regel wird nach geraumer Zeit ein Kind auf den Gedanken kommen, Linien einzuzeichnen, die beide Stücke in gleiche Teilstücke unterteilen, nämlich in Sechstel.

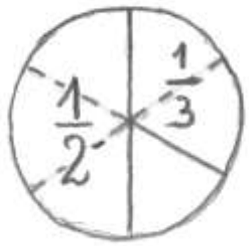


Abb.18: Halbe plus Drittel eines Kreises

Schreiben wir auf, was die Zeichnung darstellt, so erhalten wir $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$.

Durch die Unterteilung sind die beiden zunächst „artfremden“ Bruchteile *harmonisiert* worden. Nur so kann man sie nun zusammenzählen - oder auch subtrahieren.

Hier sollte der Lehrer alle ihm nur mögliche Phantasie aufwenden, um den Kindern ein starkes Gefühl für dieses Harmonisieren zu wecken, das in dem Gleichnamigmachen liegt. Man muss ein gemeinsames Maß finden, das in beide Bruchteile hineingeht; das heißt, wir haben so zu unterteilen, dass in beiden Teilstücken die Unterteilung zu gleichen Größen führt. Für die Nenner 2 und 3 ist dies der Nenner 6.

Betrachten wir unter diesem Gesichtspunkt noch einmal die Aufgabe

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=?$$

Diese Aufgabe ist leicht. Wir brauchen ja nur das Halbe noch einmal zu halbieren und erhalten dann aus ihm zwei Viertel.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

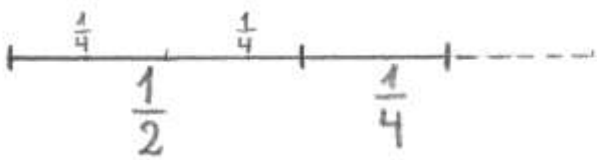


Abb.19: Halbe plus Viertel einer Strecke

Wie viel ist $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}$? Hier ist die Aufgabe schon wesentlich schwieriger, denn im bloßen Anschauen ist das gemeinsame Maß nicht mehr unmittelbar abzuschätzen. Man kann die Kinder fragen: Was erhalten wir, wenn wir das Fünftel noch einmal halbieren? Die Antwort ist ein Zehntel. Dann kann man fragen: Kann man denn auch das Halbe in Zehntel verwandeln? Das ist möglich, denn das Ganze ist zehn Zehntel, dann ist die Hälfte fünf Zehntel. Also ist

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{5}=\frac{5}{10}+\frac{2}{10}=\frac{7}{10}$$

Abb.20 Ccc einfügen

Wer kann $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$ addieren?

Wir wissen schon, dass das Halbe sich in drei Sechstel zerlegen lässt:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}+\frac{1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

Hier können wir wieder das Kürzen anwenden, das seit seiner Einführung begleitend immer wieder innerhalb dem schriftlichen Rechnen und in den Hausaufgaben geübt wurde.

Wir üben solche einfachen Additionen ungleichnamiger Stammbrüche mit kleinen Nennern in vielfältiger Weise. Weitere Beispiele sind etwa

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4},\quad \frac{1}{3}+\frac{1}{5},\quad \frac{1}{3}+\frac{1}{6},\quad \frac{1}{4}+\frac{1}{5},\quad \frac{1}{4}+\frac{1}{6},\ \ldots$$

Bei der Wahl der Zahlenbeispiele achten wir noch möglichst auf die Anschaulichkeit der Brüche. Wir bevorzugen also Teilungen, die aus einfachen Grundzahlen hervorgehen. Viele Kinder brauchen bereits für Drittel, Sechstel, Zwölftel schon viel Zeit und Übung, um damit eine sichere Größenvorstellung zu verbinden. Es kann also besser sein, mehrere Aufgaben mit gleichbleibenden Nennern nacheinander zu machen, anstatt beliebig zwischen den verschiedenen Bruchsorten zu wechseln. Sie sollten also beispielsweise die Achtel genügend gut kennenlernen, damit sie den Bruch $^3/_8$ innerhalb einer Figur malen können, oder umgekehrt ihn im Bild wieder erkennen. Die Illustrierbarkeit im Heft ist noch etliche Zeit eine wertvolle Hilfe, damit sich die Kinder die Brüche aneignen können.

Dennoch werden bei Bildern Brüche mit ähnlicher Größe noch leicht verwechselt: Selbst bei eingezeichneter „Inneneinteilung“ setzen nicht wenige Schüler die Abbildung des Bruchstückes „drei Achtel“ mit der Form „ein Drittel“ gleich. Auch die Unterscheidung von $^5/_8$, $^3/_5$ und $^2/_3$ fällt oft schwer und bedarf der Trennlinien im Innern, damit die einzelnen (Stamm-)Bruchstücke sichtbar bleiben. Der Lehrer wird nicht alle Verwechslungsmöglichkeiten vermeiden können (oder wollen), aber doch stets bedenken, dass die Kinder bei ihren Gefühlsurteilen nicht unnötig irritiert werden sollten.

Die im Haushaltsalltag üblichen Teilungen in Halbe, Viertel, Achtel, Zwölftel und Sechzehntel, ebenso die Zwölfer- oder gar Sechziger-Teilung bei der Uhr sind ein wertvoller Fundus für Brüche, mit denen Kinder sichere Größenvorstellungen verbinden können. Die Fünferteilung des Kreises kennen sie aus dem Formenzeichnen. Wenn diese Bruchteile nochmals halbiert werden, erreichen wir eine reiche Palette von möglichen Brüchen, innerhalb derer die Kindern das Gefühl haben können, das sie „etwas wieder erkennen“.

Am Folgetag machen wir noch einmal darauf aufmerksam, wodurch uns das Addieren der so unterschiedlichen Brüche gelungen ist. Erst nachdem wir beide Brüche gleichnamig gemacht hatten, wurden sie vergleichbar. Wir können nun also auch Vergleiche vornehmen und nach dem Unterschied zwischen zwei Brüchen fragen: Wie groß ist der Unterschied zwischen ½ und $^1/_3$?

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{3}{6}-\frac{2}{6}=\frac{1}{6}$$

Von 1/2 wird 1/8 weggenommen; wie viel bleibt übrig?

Um wie viel größer sind 3/8 im Vergleich zu ¼?

Wir greifen nochmals auf einige unserer vielen Beispiele zurück und achten worauf es ankommt. Stets mussten wir die beiden Brüche vergleichbar machen, sie brauchten beide den gleichen Nenner. Manchmal reichte es, einen der beiden zu erweitern, damit er den anderen traf; manchmal mussten wir beide erweitern, damit sie in einem neuen Nenner, dem *Hauptnenner*, harmonisch zusammenklingen konnten. Wie erkennen wir das Ziel, den künftigen Hauptnenner und wie finden wir den Weg zu ihm hin?

Schauen wir noch einmal das Beispiel $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ an. Der Hauptnenner für beide Brüche war die 6. Hatten wir ihn gefunden, dann schauten wir, wie oft die 2 in der 6 enthalten war (3x) und erweiterten mit dieser Zahl den Bruch $\frac{1}{2}$ zu $\frac{3}{6}$:

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{3}=\frac{3}{6}$$

Dann schauten wir, wie oft die 3 in der 6 enthalten war ($2\times$) und erweiterten damit $\frac{1}{3}$ zu $\frac{2}{6}$:

$$\frac{1}{3}=\frac{1\cdot 2}{3\cdot 2}=\frac{2}{6}$$

So erhielten wir

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$$

Bevor wir dies für andere Brüche entsprechend durchführen, verlassen wir für einen Augenblick das eigentliche Addieren der Brüche und wenden uns ganz dem Aufsuchen des Hauptnenners zu. Dabei können wir uns auch einmal von äußeren Bildern lösen und dafür die eigene Bewegung – also im *Zeitlichen und Räumlichen* – einsetzen. Dies kann in der schönsten Weise aus einem musikalischen Element gewonnen werden, indem wir nun auf Rhythmen achten, welche die Kinder viel innerlicher erleben wie äußere Abbildungen.

Rhythmologisches Rechnen

Mit dieser Betrachtungsweise hatten wir bereits in der 3. Klasse begonnen. Aus guten Gründen sollte dieser Ansatz in Zukunft den ganzen Mathematikunterricht durchdringen: Er ist ein Gegengewicht zu dem immer stärkeren Materialisieren des Denkens an so genannten materiellen Unterrichtshilfen bei denen alles auf ein äußeres Operieren und Anschauen hinauslaufen soll. Für die Entwicklung des Denkens, das sich frei in Begriffen bewegen lernen soll und für ein inneres Beleben der Naturanschauung durch ein Beachten der vielfältigen rhythmischen Formen in der Erscheinungswelt, ist dies von allergrößter Bedeutung.

Das Folgende wurde schon in dem Band in der 3. Klasse angelegt. Die Erzählung von den springenden Pferden wird etwas später wieder aufgegriffen werden, zunächst führen wir die Geschichte von den atmenden Tieren mit der Vaterzahl, der Mutterzahl, der Kindzahl und der Familienzahl weiter – oder, wenn sie noch nicht verwendet wurde, hier neu ein. Nur sollte sie dann in etwas anderem Stil erzählt werden, als es in der 3. Klasse geschah. Deshalb wird die Geschichte hier noch einmal etwas modifiziert.

Gewöhnlich erfassen wir eine Zahl als eine *Anzahl* von Dingen, die beispielsweise als Stühle, Äpfel oder Brotscheiben räumlich nebeneinander zu finden sind. Auch im zeitlichen Nacheinander - etwa beim Schlagen einer Uhr - können wir die Anzahl bestimmen. Eine andere Betrachtungsweise fasst die Zahl als *Rhythmus* auf, als *zeitliches* Gestaltungsmoment. Gehen wir mit dem Rhythmus der Zahl 3, dem Dreierrhythmus, durch die Zahlenreihe, so werden die Zahlen 3, 6, 9, 12 ... getroffen. Der Zweierrhythmus trifft die Zahlen 2, 4, 6, 8, ...

Diese beiden Rhythmen klingen wiederum in einem Rhythmus zusammen, dem Sechserrhythmus, nämlich bei 6, 12, 18, 24, ...

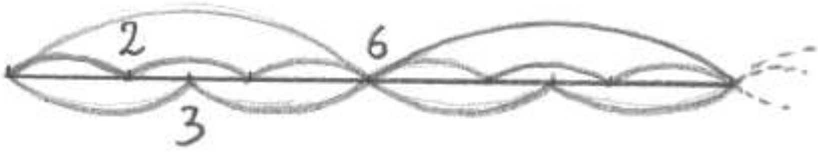


Abb. 21: Zweier- und Dreier-Rhythmus

Betrachten wir die Rhythmen, welche durch die Zahlen 4 und 6 bestimmt sind. Sie klingen regelmäßig im Zwölferrhythmus zusammen. Das heißt, bei den Zahlen 12, 24, 36, 48, ... Dies ist der *Zusammenklangsrhythmus* des Vierer- und des Sechserrhythmus.

Abb. 22: Vierer- und Sechser-Rhythmus

Die kleine Geschichte von den atmenden Tieren kann das Ineinanderspielen der Rhythmen phantasievoll beleben.[33] So kann man erzählen:

> Im zoologischen Garten gibt es viele verschiedene Tierarten, von ganz klein bis ganz groß. In einer stillen Nacht, wenn der Verkehrslärm ringsum verstummt, hört man im Tierhaus die unterschiedlichsten Tiere atmen. Da sind die ganz großen Tiere, die sehr langsam atmen, so langsam, dass man als Mensch es gar nicht nachmachen kann. Dann gibt es kleine Tiere wie Kaninchen oder sogar Mäuse, die so schnell atmen, dass man als Mensch es auch nicht mithalten kann. Dazwischen sind die mittleren Tiere, von denen die einen etwas schneller, die anderen etwas langsamer als wir Menschen atmen. Man merkt, je größer ein Tier, desto langsamer wird es im Allgemeinen atmen und je kleiner ein Tier ist, desto rascher atmet es. Die winzigen Haselmäuse oder die Kolibris atmen so schnell, dass man es mit den Augen kaum verfolgen kann. Aber auch unter den Menschen ist es so, dass die Großen meistens langsamer und die Kleinen viel rascher atmen.

Schildert man dies, so beginnt die ganze Klasse aufmerksam auf das eigene Atmen zu werden. Es tritt in das Bewusstsein, wo wir selber einen nie ermüdenden Rhythmus in uns tragen. Wir können ganz gleichmäßig mitzählen oder den Atem-Rhythmus mit dem Finger mitklopfen und dann auch mal versuchen, nur bei jedem zweiten Schlag zu atmen – gar nicht so einfach!

In der Erzählung kann man so fortfahren, dass man von einer Tapirfamilie erzählt, in der das Vatertier etwas größer, das Muttertier etwas kleiner und das Tapirferkel am kleinsten waren.

> Das Tapirkind lag wach, es hörte auf die Atemzüge der Eltern und zählte mit. Der Vater atmete im Rhythmus 6, 12, 18, 24, 30, 36 ..., die Mutter etwas rascher im Viererrhythmus 4, 8, 12, 16, 20, 24 ...; und bei 12, 24, ... erklangen die sonst verschiedenen Atemzüge der Eltern sogar gemeinsam. Jetzt wollte es einmal versuchen, wie der Vater zu atmen. Das gelang ihm aber gar nicht. Nur bis zur 5 konnte es den Atem einholen, dann wurde ihm schon ganz schwindlig. Dann versuchte es mit der Mutter zu atmen. Einmal ging es, wenigstens bis zur 4; aber schon beim nächsten Atemzug ging es ihm zu langsam; es kam nur bis zur 7 statt bis zur gewünschten 8.

[33] Siehe Seite xxx

Da hatte es einen guten Gedanken: Warum soll ich wie der Vater *oder* wie die Mutter atmen, sagte es sich. Ich gehöre zu Vater *und* Mutter, dann will ich auch mit beiden atmen. Weil ich aber für mich als Kind auch etwas bin, atme ich dazwischen nur für mich.

Wie hat nun das Tapirferkel geatmet, wenn es ganz gleichmäßig atmete und dabei alle Atemschläge des Vaters und der Mutter mitmachte?

Es hat im Zweierrhythmus geatmet: bei 2 alleine, bei 4 mit der Mutter, bei 6 mit dem Vater, bei 8 mit der Mutter, bei 10 alleine, und bei 12 atmet die ganze Familie gemeinsam! So ging es immer weiter.

Damit haben wir einen zweiten Rhythmus gefunden, der zu den beiden Ausgangsrhythmen, dem Sechserrhythmus und dem Viererrhythmus gehören: den *harmonisierenden* oder *verbindenden* Rhythmus.[34]

Gehen wir von anderen Rhythmen aus, so erhalten wir auch andere Zusammenklangs- und harmonisierende Rhythmen. Im Folgenden sind eine Reihe solcher zusammengehöriger Rhythmen angegeben. Dabei stehen links und rechts die Zahlen der Ausgangsrhythmen, oben die Zahlen des Zusammenklangs- und des harmonisierenden Rhythmus.

	12			18			24			8	
4		6	6		9	6		8	4		8
	2			3			2			4	
	24			45			120			42	
8		12	9		15	8		15	14		21
	4			3			1			7	

Wir sehen hier, wie sich ganz unterschiedliche Zahlenbeziehungen in den zugehörigen Rhythmen zeigen. Die Zahlen haben unterschiedliche Verwandtschaftsverhältnisse, fast könnte man sagen, Sympathien für einander. 4 und 8 sind ganz eng miteinander verbunden: Der Viererrhythmus zählt auch alle Achterschläge mit. Der Zusammenklangsrhythmus ist 8 und der Verbindungsrhythmus ist 4. So entsteht durch sie nichts Neues. Sie sind zu eng miteinander verbunden.

Bei 8 und 15 liegt gerade der entgegengesetzte Fall vor. Sie haben gar keine tiefergehende Beziehung und treffen sich deshalb erst im Rhythmus des Produktes $8 \times 15 = 120$. Der Verbindungsrhythmus ist entsprechend rasch, so rasch wie ein Rhythmus aus natürlichen (oder ganzen) Zahlen nur sein kann, nämlich 1.

Zwischen den vier zusammengehörenden Zahlen ergeben sich vielfältigste Beziehungen: So kann man im Zahlenviereck die Verhältnisse der Zahlen auf gegenüberliegenden Seiten bilden und erhält jeweils die gleiche Zahl; oder man kann das Produkt gegenüberstehender Zahlen bilden und erhält das gleiche Produkt. Am Beispiel der Grundrhythmen 4 und 6 ergibt sich

$12 : 4 = 6 : 2 = 3$ oder $12 : 6 = 4 : 2$ und $4 \times 6 = 2 \times 12 = 24$

Hier können die Kinder in ganz elementarer Weise Erfahrungen an Zahlbeziehungen machen, die später in der elementaren Zahlentheorie zu grundlegenden Sätzen führen. Es geht noch nicht um die logische Rückführung der genannten Sachverhalte auf ein Axiomensytem,

[34] Die Zahl des Zusammenklangsrhythmus ist das kleinste gemeinschaftliche Vielfache (kgV), die Zahl des harmonisierenden oder verbindenden Rhythmus der größte gemeinsame Teiler (ggT) der beiden Ausgangszahlen.

sondern es soll das Staunen für die Harmonie in der Welt der Rhythmen geweckt werden, also vor allem ein Gefühlseindruck wachgerufen werden.

Ist dieses Feld eines elementaren rhythmologischen Rechnens genügend ausgekostet worden, kehren wir zur Addition und Subtraktion ungleichnamiger Brüche zurück. Als Ergebnis können wir festhalten:

Regel zur Addition und Subtraktion zweier Brüche:

> *Wir finden den Hauptnenner zweier Brüche, indem wir die Zusammenklangszahl der Nenner bestimmen und dann die Brüche – wenn nötig – zu diesem Nenner erweitern. Erst danach können wir und sie zusammenzählen (addieren) beziehungsweise abziehen (subtrahieren).*

Im Einzelnen gehen wir so vor, indem wir fragen: Wie oft sind die einzelnen Nenner im Hauptnenner enthalten. Wir teilen also den Hauptnenner durch den Nenner des ersten Bruches, und mit dem Ergebnis erweitern wir diesen Bruch. Dann prüfen wir, wie oft der zweite Nenner in dem Hauptnenner enthalten ist und erweitern diesen Bruch entsprechend. Sind so die Brüche gleichnamig gemacht worden, können wir sie addieren oder subtrahieren. Bei der Aufgabe:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = ?$$

schauen wir auf den Vierer- und der Sechserrhythmus; die beiden klingen im Zwölferrhythmus zusammen. Der Hauptnenner ist also 12. Der erste Nenner 4 ist in 12 dreimal enthalten; also erweitern wir $\frac{1}{4}$ mit der Zahl 3 und erhalten $\frac{3}{12}$. Der Nenner 6 ist in der 12 zweimal enthalten, also erweitern wir $\frac{1}{6}$ mit der Zahl 2 und erhalten $\frac{2}{12}$. Nun können wir addieren:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{1\times 3}{4\times 3}+\frac{1\times 2}{6\times 2}=\frac{3}{12}+\frac{2}{12}=\frac{5}{12}$$

Entsprechend können wir nun eine Vielzahl von Stammbrüchen addieren, bis wir schließlich dazu übergehen, ganz beliebige Brüche zu addieren. Die einzige Beschränkung liegt in der Überschaubarkeit der vorkommenden Zahlen. In der 5. Klasse werden dann für die komplizierteren Fälle auch geeignete Verfahren behandelt werden.

Nach der Einführung der Brüche, dem Bewahren vor einer Fixierung auf eine Veranschaulichungsweise und der seelischen Belebung durch die Rhythmen soll durch vielfältige Übung verlässliches Können erwachsen. Gerade das Bruchrechnen braucht über viele Jahre ein immer wieder neuerliches Üben, damit das Gelernte sich festigt und es so zum sicheren Besitz der Kinderwird. Die folgenden Aufgaben wollen dazu Gelegenheit geben.

Übungen

1. Um wie viel ist 3/2 größer als 1/2? 3/2 größer als 1? 7/2 größer als 3/2? 12/2 größer als 11/2? 12/2 größer als 5? 9 größer als 13/2? 33 größer als 44/2? 100 größer als 200/2?
2. Um wie viel ist 3/2 kleiner als 2, 3, 4, 5, 6/2, 7/2, 8/2?
3. Addiere beziehungsweise subtrahiere und gib an, wie viele Ganze und wie viele Halbe das Ergebnis besitzt:

1/2 + 1/2 = ?	2/2 + 1/2 = ?	3/2 + 1/2 = ?	4/2 + 1/2 = ?	5/2 + 1/2 = ?	7/2 + 1/2 = ?
2/2 + 3/2 = ?	3/2 + 4/2 = ?	4/2 + 5/2 = ?	5/2 + 6/2 = ?	3/2 - 2/2 = ?	4/2 - 3/2 = ?
5/2 - 4/2 = ?	6/2 - 5/2 = ?	7/2 - 6/2 = ?	5/2 + 7/2 = ?	5/2 + 9/2 = ?	5/2 + 10/2 = ?
6/2 – 4/2 = ?	6/2 + 4/2 = ?	8/2 – 4/2 = ?	8/2 + 4/2 = ?	11/2 – 6/2 = ?	11/2 + 6/2 = ?

4. Addiere oder subtrahiere, wie es angegeben ist:
   1/2 + 3/2 + 5/2 – 6/2 = ? 5/2 – 3/2 – 1/2 = ? 17/2 – 8/2 – 7/2 = ?

27/2 – 19/2 + 15/2 = ?	38/2 – 22/2 + 10/2 = ?	58/2 – 37/2 – 1/2 = ?
122/2 + 222/2 – 344/2 = ?	783/2 – 183/2 – 300 = ?	444/2 + 222/2 – 333/2 = ?

Suche erst einen gemeinsamen Nenner, erweitere auf ihn und addiere oder subtrahiere dann:

½ + ¼	½ - ¼	½ + ¾	3/2 - ¾	½ - 1/8	2/3 – 1/6
¾ - 1/6	¼ + 1/6	¾ + 7/6	½ + 1/6	2/5 + 1/10	¾ - 3/10

Die folgenden Übungen schließen an das analysierende Rechnen an, das wir seit der 1. Klasse geübt haben (*Vom Ganzen zum Teil*). Es gibt dem Kind Freiräume, seinen eigenen Lösungsweg zu finden überraschende Lösungen u erarbeiten.

1. Zerlege 1 auf verschiedene Arten in eine Summe oder Differenz von Brüchen.
2. Zerlege 3 so auf verschiedene Arten in Brüche, dass kein Nenner öfter als dreimal vorkommt.
3. Zeichne ein Rechteck. Dies soll das Ganze sein. Zerlege es in verschieden große Teile, schreibe in jedes Teil hinein, um welchen Bruchteil vom Ganzen es sich handelt. Schreibe die Zerlegung als Summe von Brüchen auf. Beispiel:
   ccc

Ergänzungen

Ausweitung auf mehrere Brüche

Je nach Lernfortschritt der Klasse bietet es sich an, auch mehr als zwei Brüche zu addieren. Dann gilt es, die Zusammenklangszahl von drei und mehr Zahlenrhythmen zu finden, um den Hauptnenner zu bestimmen. Sieht man ihn sofort, wie bei dem Beispiel

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$$

so wird man rasch addieren können. Ist es schwieriger, so sucht man erst die Zusammenklangszahl der beiden größeren Zahlen und lässt diese wiederum mit der nächst kleineren Zahl zusammenklingen. Haben wir beispielsweise $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}$ zu addieren, so lassen wir zunächst 6 und 9 in 18 zusammenklingen und sehen, dass hierin auch schon die 3 enthalten ist. Dann erhalten wir

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}=\frac{1\cdot 6}{3\cdot 6}+\frac{1\cdot 3}{6\cdot 3}+\frac{1\cdot 2}{9\cdot 2}=\frac{6}{18}+\frac{3}{18}+\frac{2}{18}=\frac{11}{18}$$

Ähnlich ist es bei

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{20}.$$

5 und 20 klingen in 20 zusammen, worin auch 4 enthalten ist. Der Hauptnenner ist also 20.

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{20}=\frac{1\cdot 5}{4\cdot 5}+\frac{1\cdot 4}{5\cdot 4}+\frac{1\cdot 1}{20\cdot 1}=\frac{10}{20}$$

Haben wir aber beispielsweise $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$, so klingen 3 und 5 erst in 15 zusammen, 15 und 2 in 30. Der Hauptnenner ist also 30.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{1\cdot 15}{2\cdot 15}+\frac{1\cdot 10}{3\cdot 10}+\frac{1\cdot 6}{5\cdot 6}=\frac{15}{30}+\frac{10}{30}+\frac{6}{30}=\frac{31}{30}$$

Wird in der 4. Klasse dieses Bestimmen des Hauptnenners ganz aus einem musikalisch-rhythmischen Element eingeführt, entwickeln die Kinder meist eine empfindungsmäßige Treffsicherheit, aus der heraus sie solche Aufgaben leicht lösen können.

Rhythmen von Bruchteilen

In dem Abschnitt über das rhythmologische Rechnen haben wir das Auffinden des Hauptnenners von zwei (oder mehr Brüchen) über die *Zusammenklangszahl* der Nenner besprochen. Es kann nun sehr anregend sein, das mit den Zahlen geübte Vorgehen auf die Bruchteile selbst anzuwenden. Im Grunde geschah das schon, als wir in Abbildung 15 [ccc bleibt es 15?] ein gemeinsames Maß für zwei Bruchteile suchten: Die Hälfte einer Strecke und ein Drittel von ihr können mit einem Sechstel der Strecke ausgemessen werden. Ein Sechstel ist ein *gemeinsames Maß* für ein Halbes und ein Drittel. 1/6 ist also der *harmonisierende Rhythmus* für die Rhythmen von 1/2 und 1/3. Wo klingen umgekehrt die Rhythmen von 1/2 und 1/3 zusammen?

Im 1er-Rhythmus, dem harmonisierenden Rhythmus von 2 und 3! Der Zusammenklangsrhythmus von 1/2 und 1/3 ist also der harmonisierende Rhythmus von 2 und 3!

In einer Tafelzeichnung kann man dies entsprechend zur Zeichnung 15 [CCC?] und entsprechend mit einer Schreit-Übung zeigen. Dies sollte auch mit den folgenden Übungen geschehen.

Stufenweise können nun die Rhythmenverhältnisse von Brüchen genauer studiert werden:

1. Wo klingen 1/2 und 1/4 zusammen? Das geschieht in 1/2, während der 1/4- Rhythmus alle Viertel und Halben trifft, also die beiden Rhythmen harmonisiert. Das ist die gerade umgekehrt wie beim Zweier- und Viererrhythmus.
2. Wo klingen 1/4 und 1/6 zusammen? Das geschieht im Rhythmus der Halben, denn 2/4 = 3/6 = 1/2. Verbunden oder harmonisiert werden die beiden Rhythmen durch 1/12, denn die Zwölftel zählen alle Viertel und Sechstel mit. Wieder ist es gerade umgekehrt, wie bei 4 und 6.4 und 6 klingen bei 12 zusammen, während 2 die beiden Rhythmen verbindet oder harmonisiert.

Außer durch eine Zeichnung kann dies mit einer schriftlichen Darstellung deutlich gemacht werden:

Harmon. Rhythmus	0	1/12	2/12	3/12	4/12	5/12	6/12	7/12	8/12	9/12	10/12	11/12	12/12	13/12	…
Ausgangs-	**0**		**1/6**		**2/6**		**3/6**		**4/6**		**5/6**		**6/6**	**…**	
rhythmen	**0**			**1/4**			**2/4**			**3/4**			**4/4**	**…**	
Zusammkl. Rhythmus	0						1/2						2/2	…	

Vergleichen wir dies mit der Harmonisierung der Rhythmen von 4 und 6, dann wird die Umkehrung besonders deutlich sichtbar.

Zusammkl. Rhythmus	0						12						24	…
Ausgangs-	**0**		**4**		**8**		**12**		**16**		**20**		**24**	**…**
rhythmen	**0**			**6**			**12**			**18**			**24**	**…**
Harmon. Rhythmus	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	…

Im ersten Fall harmonisieren die Zwölftel die beiden Ausgangsrhythmen, im zweiten Fall ist 12 der Zusammenklangsrhythmus.- Im ersten Fall klingen die beiden Ausgangsrhythmen in 1/2 zusammen, im zweiten Fall harmonisiert die 2 die beiden Rhythmen.

Für Stammbrüche findet man die

Regel:

> *Der Nenner des Zusammenklangrhythmus zweier Stammbrüche ist gleich der harmonisierenden Zahl der Nenner.*
>
> *Der Nenner des harmonisierenden Bruches zweier Stammbrüche ist gleich der Zusammenklangszahl der Nenner der beiden Stammbrüche.*

Dezimalbrüche

Die Kinder sind den Dezimalbrüchen bereits in der 3. Klasse im Rahmen des Sachrechnens beim Messen (m, cm, mm) und dem Umgang mit Geld (Euro, Cent) in einfacher Weise begegnet. In der 4. Klasse können sie in Beziehung zu den neu eingeführten Brüchen gesetzt und ihre Anwendung wesentlich erweitert werden. Die Gepflogenheiten an Waldorfschulen sind allerdings hier sehr unterschiedlich – von dem Beginn der Bruchrechnung mit Dezimalbrüchen bis zur Verschiebung in die 5. Klasse. Die Angabe Rudolf Steiners ist allerdings in diesem Punkt eindeutig:

> *„Im vierten Schuljahr wird das fortgesetzt, was in den ersten Schuljahren gepflogen worden ist. Aber jetzt müssen wir übergehen zur Bruchlehre und namentlich zur Dezimalbruchlehre.*
>
> *Wir wollen dann im fünften Schuljahr mit der Bruchlehre und mit der Dezimalbruchlehre fortsetzen und alles dasjenige an das Kind heran bringen, was ihm die Fähigkeit beibringt, sich innerhalb ganzer, gebrochener, durch Dezimalbrüche ausgedrückter Zahlen frei rechnend zu bewegen.“*[35]

Im bisherigen Verlauf der ersten Epoche sollten die Kinder vor allem mit den Brüchen vertraut werden. Dabei wurden die Bruchteile vielfältig durch Größen dargestellt – durch Längen, Flächen und Volumina. Bewegung, Geschwindigkeit (und Zeit) und Rhythmus-Bindung ergänzten die äußeren Bilder. Die *Größenvorstellungen* ermöglichten auch die Zusammensetzung (*Addition*) von Brüchen und einen ersten Größenvergleich (*Subtraktion*). Eine Ausweitung auf die *Multiplikation* ist zwar schon vorbreitet durch rhythmische Wiederholung und Gliederung, unterbleibt aber an dieser frühen Stelle, weil sie über die reine Größenvorstellung hinausreicht und Brüche bereits in ihrer Eigenschaft als *Zahlenverhältnisse* betrachtet.

Stattdessen bietet es sich an, die *Dezimalbrüche* nun systematisch einzuführen. Sie erleichtern den Umgang mit Größen erheblich und erlauben eine direkte Anwendung in Sachaufgaben. Wir schließen an das *Sachrechnen* der 3. Klasse an und leiten die Dezimalschreibweise aus bereits bekannten Größen ab.

Klassischerweise waren in der 4. Klasse zwei große Rechenepochen zu ja 4 Wochen üblich. In diesem Fall eignet sich die folgende Einführung für die 4. Woche am Ende der ersten Epoche. Häufig entscheiden sich Klassenlehrer auch für 3 Epochen mit dann meist nur 3 Wochen Länge. Dann wären die Dezimalbrüche geeignet als völlig neuer Einstieg für die zweite Epoche und einer Weiterführung gemäß der später vorgestellten Rechenverfahren dazu.

Stellenschreibweise von Bruchteilen

Dazu regte Rudolf Steiner an:

> *„Die Kinder sollten von Anfang an ein Gefühl dafür bekommen, dass das Benutzen des Dezimalbruches eigentlich auf menschlicher Konvention, auf einer Art menschlicher*

[35] Rudolf Steiner, Erziehungskunst. Seminarbesprechungen und Lehrplanvorträge, GA 295, 2. Lehrplanvortrag, S. 168

Bequemlichkeit beruht; und sie sollten ein weiteres Gefühl davon bekommen, dass das Ansetzen eines Dezimalbruches eigentlich nichts weiter ist, als ein Fortsetzen derselben Methoden, welche unseren Zahlen überhaupt zugrunde liegt.... Dieses Konventionelle, das in den Einteilungen steckt, sollte den Kindern durchaus vom Anfange beigebracht werden."[36]

In der Tat erforderte der Alltag von Handwerk und Handel verbindliche Übereinkunft nicht nur über Maßeinheiten und Geldwerte, sondern auch deren ausreichend feine Gliederung in kleinere Einheiten. Dieses praktische Vorgehen war also durchaus analysierend (vom Ganzen zum Teil). Selbst unser geläufiges „Kleingeld" entstand ursprünglich in Form einer „Scheidemünze"[37] als Teil der vollen Münze. Entsprechend zu dieser historischen Entwicklung lassen sich plausible Bilder finden, mit denen die Kinder die Dezimalschreibweise als sinnvolle Vereinbarung kennen lernen. Der Zugang erfolgt deswegen auch am besten in engem Zusammenhang mit konkreten Anlässen (Messen, Wiegen).

Später kann man – zum Beispiel mit einem Hinweis auf die Physik in der 6. Klasse – auch darauf aufmerksam machen, dass es nicht überall sinnvoll ist, die gewöhnlichen Brüche durch Dezimalbrüche zu ersetzen: Wenn es um Zahlen-Verhältnisse geht, verwischt eine dezimale Schreibweise oft das Gemeinte[38]. Noch wichtiger ist es für die in der sechsten Klasse beginnenden algebraischen Schreibweise mit der gewöhnlichen Bruchdarstellung vertraut zu sein. Durch die Einführung der Dezimalbrüche wird also die gewöhnliche Bruchschreibweise keineswegs überflüssig.

Wir stellen im Folgenden *zwei* Wege zur Einführung der Dezimalbrüche dar, die alternativ gewählt werden können:

Der erste schließt sich an die Erfahrungen der Kinder aus dem Umgang mit Geld an und wird sicher manchen Kindern leichter fallen, weil der Name Cent die Hunderter-Teilung greifbar macht. Vor allem, wenn in der 3.Klasse der Geldwechsel in der Wechselstube samt Einführung von Stellenübertrag und schriftlichen Rechnungsarten zu kurz kam, kann nun mit erträglichem Zeiteinsatz nachgearbeitet, vertieft und gesichert werden. Zu diesem Zweck wird nachfolgend ausreichend Arbeitsmaterial bereit gestellt.

Der zweite und sehr direkte Weg folgt enger der begrifflichen Bestimmung von Dezimalbrüchen, als Geleit wird hier die Teilung des Meters in 10er-Schritten angeboten.

Welchen Weg ein Lehrer einschlagen will, muss er beim Wahrnehmen seiner Klasse selbst entscheiden. Unabhängig vom gewählten Weg sind die Übungen beider Wege hilfreich. Der Umgang mit Geld und die Benutzung der Längenmaße sind in jedem Fall ausreichend zu erüben. Als weiteres Maß bietet sich das Gewicht an. Das anschließende reine Zahlenrechnen ohne Maß- und Sachbezüge ist damit solide unterbaut.

Bei unserer ersten systematischen Behandlung der Dezimalbrüche beschränken wir uns bei beiden Wegen auf die Einführung der Kommaschreibweise und die beiden Grundoperation – der Addition und Subtraktion.

---

[36] Rudolf Steiner, *Die Erneuerung der pädagogisch-didaktischen Kunst*, GA 301, S.219

[37] Das Wort „scheiden" erinnert mit seiner Bedeutung „(ab-)trennen" an die Teilung eines ursprünglich Ganzen. Die Scheidemünze (z.B. Heller, Pfennig) hatte einen festgelegten Bruchteil des Edelmetallgewichtes der vollen Münze. In der Schweiz trägt noch heute die Münze für den Geldbetrag 0,50 Franken = 50 Rappen den Namen „½ Franken". Das Gewicht dieser Münze ist mit 2,2g tatsächlich die Hälfte eines ganzen Frankens (4,4g).

[38] Will man zum Beispiel in der Akustik die Intervalle durch Schwingungsverhältnisse unterschiedlicher Saitenlängen charakterisieren, so wäre es wenig hilfreich, für die Quart als Verhältniszahl statt 3 : 4 die Zahl 0,75 oder für die Quint 0,666… statt 2 : 3 anzugeben.

Erster Weg: Die Konvention des Geldes

Spätestens seit dem Sachrechnen der dritten Klasse ist den Kindern der Umgang mit Geld gut vertraut, das sie natürlich aus dem Alltag schon viel früher kennen. Sie kennen auch das Komma als Trennungszeichen zwischen den vollen Euro-Beträgen und dem Kleingeld. Die beliebte Schreibweise -,50 oder 2,- können sie in die korrekten 0,50 bzw. 2,00 übertragen und umgekehrt. Allerdings erfolgt die Zählung des Kleingeldes in Schritten von einem Cent von 1 bis 99. Bei 100 erfolgt der Übergang zur vollen Münze. Die Hunderter-Teilung führte also zu einer neuen Zähleinheit: Die kleine Geldeinheit Cent wird als Ganzes angesehen und auch so gezählt[39]. Der Rückbezug von Kleingeldbeträgen zur Währungseinheit ist dagegen für die Kinder ungewohnt. Selbst bei passenden Teil-Beträgen wie 20 Cent werden diese wohl kaum mit dem entsprechenden Bruchteil des Ganzen – hier 1/5 eines Euro-Stückes – verglichen.

Die Dezimalschreibweise (mit stets zwei Stellen) ist zwar bekannt, nicht aber ihre Bedeutung als Dezimalbruch. Dieses zunächst noch unvollständige Vorwissen kann im Unterricht genutzt werden. Sobald die Stückelung des Geldes als Bruchteile des Ganzen erkannt wird, ist die Brücke zu den eigentlichen Brüchen geschlagen. Gleichzeitig wird die (zweistellige) Dezimalschreibweise als besondere Darstellungsform eines Bruches mit dem Nenner Hundert erkannt. Nach Einübung der Sprechweise kann dann auf die anderen Dezimalstellen geschlossen werden.

Die Dezimalschreibweise von Geldbeträgen

Nach der Ankündigung: „Wir rechnen morgen mit richtigem Geld“ werden die meisten Schüler auch etliche Münzen mitbringen. Die erste Heftseite bildet die Stückelung des Geldes ab und beschreibt mögliche Wechsel in Kleingeld. Mit großer Freude der Klasse dürfen dazu etliche Münzen als Farbabdruck ins Heft „kopiert“ werden[40], allerdings mit System: Die Münzen sollen zusammen immer einen Euro ergeben. Als Hausaufgabe darf eine Wechselart gemacht werden, bei der alle Münzarten benutzt werden[41]. Die „reinen“ Wechselarten in gleiche Stücke werden davon unabhängig gemalt:

Einen Euro	(1E)	können wir wechseln in:
2 × 50-Cent-Stücke	(50C) (50C)	
5 × 20-Cent-Stücke	(20C) (20C) (20C) (20C) (20C)	
10 × 10-Cent-Stücke	10-mal (10C)	– ab hier nur noch eine Münze malen –
20 × 5-Cent-Stücke	20-mal (5C)	
50 × 2-Cent-Stücke	50-mal (2C)	
100 × 1-Cent-Stücke	100-mal (1C)	

Jede unserer Kleingeld-Münzen ist ein echter Bruchteil des ganzen Euros. Beim Rückbezug auf das Ganze folgt aus der Anzahl der Stücke die Bezeichnung des entsprechenden Bruchteils (20 Cent sind 1/5 Euro, weil 5 Stücke davon einen ganzen Euro ergeben). Finden sich noch andere Bruchteile, für die es keine passende Münze[42] gibt? Nach der Frage: „Wie

[39] Die Bildung von Brüchen wird durch diese Strategie vermieden; durch den Übergang auf den Bruchteil wird dieser *quasi-kardinal* gezählt. Mit derselben Vorgehensweise vervielfältigen Kinder normalerweise auch die Stammbrüche zu gemeinen Brüchen.

[40] Die Methode ist vielleicht nicht allgemein bekannt: Die Münze wird unter das Blatt gelegt und in passender Farbe mit flach gehaltenem Stift und leichtem Druck übermalt.

[41] Dabei liegen bereits aus der Forderung „alle Münzen“ bereits 88 Cent fest, nur die restlichen 12 sind frei wählbar.

[42] Es sind nur Teiler von 100 möglich; alle Kleingeldmünzen sind bereits solche Teile. Die einzigen nicht dadurch erfassten Teile sind das Viertel (25 Ct) und das 25-stel (4 Ct).

wird denn ein Preis von 20 Cent im Laden geschrieben?“ kann auch schon die Dezimalschreibweise von Preisen benutzt werden:

100 Cent	1,00 Euro	1 ganzer Euro ,	1 Einer (E)	1 €
50 Cent	0,50 Euro	½ Euro		
20 Cent	0,20 Euro	1/5 Euro		
10 Cent	0,10 Euro	1/10 Euro	1 Zehntel (z)	1/10 €
5 Cent	0,05 Euro	1/20 Euro		
2 Cent	0,02 Euro	1/50 Euro		
1 Cent	0,01 Euro	1/100 Euro	1 Hundertstel (h)	1/100 €

Drei dieser Münzen (z, h) haben wir hervorgehoben. Mit ihnen kann jeder beliebige (Klein-)Geldbetrag leicht gebildet werden; dabei erkennen wir die benötigte Anzahl der Münzen an der Ziffernfolge des Betrages. Aus diesem bevorzugten Gebrauch der Zehntel- und Hundertstel-Werte entdecken wir die sinnvolle Fortsetzung der aus Klasse 3 bekannten Stellenschreibweise. Wir erinnern an die „Wechselstube“ mit den Fächern für die „großen“ Werte über den Einern (E): Zehner (Z), Hunderter (H) und Tausender (T), die links vom Komma stehen.

Mit einigen Beispielen üben wir nochmals den Wechsel innerhalb der Stellen:

24 Zehner sind 2 Hunderter und 4 Zehner (=240)

36 Einer sind 3 Zehner und 6 Einer (=36)

645 Zehner sind 64 Hunderter und 5 Zehner oder 6T 4H 5Z (=6450)

Nun ergänzen wir rechts vom Komma mit Zehnteln und Hundertsteln, die wir mit kleinen Buchstaben abkürzen:

Bei 0,25 Euro können wir 20 Cent wechseln in 2 Zehn-Cent-Stücke, also 2 Zehntel; die verbleibenden 0,05 Euro oder 5 Cent können wir wechseln in 5 Cent-Stücke, also 5 Hundertstel. Zusammen sind es: 0,25 Euro oder 2 Zehntel und 5 Hundertstel; kurz: 0,25 sind 2 z und 5 h.

3,65 werden entsprechend gewechselt in 3 Einer, 6 Zehntel und 5 Hundertstel Euro; also: 3,65 sind 3 E und 6 z und 5 h.

Mit weiteren Beispielen wird die Sprechweise geübt und der Rückbezug zur Einheit gefestigt:

Zu 4,28€ sagten wir bisher „4 Euro 28“ (Cent)

Wir zerlegen diesen Betrag in 4 Einer, 2 Zehntel und 8 Hundertstel, dazu führen wir die neue Lesart „vier Komma zwei acht“ ein, welche genau diese Aufreihung befolgt und durch das Komma den Übergang zu den Bruchteilen sichtbar macht.

486,25 sind: 4 H 8 Z 6 E (Komma) 2 z 5 h

Mündlich können die Kinder immer wieder Zahlen untersuchen (große Zahlen an die Tafel schreiben lassen) und dabei die Stellen benennen:

7528,46 E: 7 Tausend-Euro-Scheine; 5 Hundert-Euro-Scheine; 2 Zehn-Euro-Scheine; 8 (Ein-)Euro-Stücke; (Komma) 4 Zehn-Cent-Stücke; 6 Cent-Stücke

oder: 7 T (Tausender); 5 H (Hunderter); 2 Z (Zehner); 8 E (Einer); (Komma) 4 z (Zehntel); 6 h (Hundertstel)

oder: 7528,46 = 7 × 1000 und 5 · 100 und 2 × 10 und 8 × 1 und 4 × 1/10 und 6 × 1/100

Das Ziel dieses Umwechselns ist also immer, dass wir jedes Fach nur mit den Ziffern 0 bis 9 belegen, sobald es 10 oder mehr sind, wechseln wir den „Überschuss“ ins nächst höhere Fach. Diese bereits in der Wechselstube der 3.Klasse geübte Gewohnheit wird also nochmals gefestigt und weitergeführt.

Übungen zur Stellenschreibweise

1. Wechsle in Zehnerschritten

(Beispiel: 7420 sind 7 Tausender und 4 Hunderter und 2 Zehner
oder 74 Hunderter und 2 Zehner   oder 742 Zehner   oder 7420 Einer)

a) 320   b) 6500   c) 8750   d) 60   e) 214   f) 5080

2. Benenne den Wert der einzelnen Ziffern

(Beispiel: 53,02 sind 5Z 3E (Komma) 0z 2h)

a) 9,65   b) 205   c) 41,36   d) 910,20   e) 1582,45   f) 20,02

3. Schreibe als Dezimalzahl

Beispiel: 153 h (Hundertstel) sind 15z 3h oder 1E 5z 3h oder 1,53

a) 426 Hundertstel   b) 35 Zehntel   c) 791 Zehntel   d) 34 Hundertstel

Geldbeträge addieren (Komma unter Komma)

Beim Kassensturz kommen verschiedene Geldscheine und -stücke zum Vorschein. Sie werden sortiert und gezählt. Der entsprechende Geldbetrag wird dezimal geschrieben und genau untereinander aufgelistet. Parallel dazu können die Einzelbeträge „sortenrein“ in Münzen von Zehnerschritten gewechselt werden; damit stimmen die Anzahlen der Münzen mit den Ziffern in der Dezimaldarstellung überein.

Wir machen Kassensturz

Das finden wir in der Kasse	So können wir wechseln	Wert: HZE,zh
2 Fünfzig-Euro-Scheine	1 Hundert-Euro-Schein	100,00
3 Zwanzig-Euro-Scheine	6 Zehn-Euro-Scheine	60,00
5 Zehn-Euro-Scheine		50,00
3 Fünf-Euro-Stücke	1 Zehn-Euro-Schein + 5 Eurostücke	15,00
6 Zwei-Euro-Stücke	1 Zehn-Euro-Schein + 2 Eurostücke	12,00
4 Euro-Stücke		4,00
7 Fünfzig-Cent-Stücke	3 Euro + 5 Zehn-Cent	3,50
8 Zwanzig-Cent-Stücke	1 Euro + 6 Zehn-Cent	1,60
12 Zehn-Cent-Stücke	1 Euro + 2 Zehn-Cent	1,20
9 Fünf-Cent-Stücke	4 Zehn-Cent + 5 Cent	0,45
16 Zwei-Cent-Stücke	3 Zehn-Cent + 2 Cent	0,32
18 Cent-Stücke	1 Zehn-Cent + 8 Cent	0,18
	Überträge	*112,1*
Summe		248,25

Bei der Addition der Zahlen wird nun darauf geachtet, dass in der ersten die Zehn-Cent-Stücke (oder Zehntel Euro) und in der zweiten *Spalte* (= *Fach*) nach dem Komma die Centstücke (oder Hundertstel Euro) zu finden sind. Dies geht leichter, wenn eine farbige senkrechte Linie das Komma ordnet und die Spalten verschieden farbig unterlegt sind.

Wir zählen nun spaltenweise zusammen, beginnend mit dem „Kleingeld“: In der Spalte „Cent“ sind: 8 + 2 + 5, also 15 Cent, welche wir in 1 Zehn-Cent-Stück und 5 Cent-Stücke wechseln. Die 5 Cent schreiben wir als Ergebnis in der Cent-Spalte, das Zehn-Cent-Stück legen wir in das nächste Fach dazu (Übertrag) und wird dann mit den anderen Zehn-Cent-Stücken zusammengezählt. Entsprechend verfahren wir mit den weiteren Spalten.

Das Gesamtergebnis wird als Zusammenstellung von entsprechenden Geldstücken interpretiert:

2 Hundert-Euro-Scheine (Hunderter); 4 Zehn-Euro-Scheine (Zehner); 8 Euro-Stücke (Einer); 2 Zehn-Cent-Stücke (Zehntel); 5 Cent-Stücke (Hundertstel).

Dieses Verfahren übertragen wir entsprechend auf die in der 3.Klasse ebenfalls mit der Wechselstube eingeführte Subtraktion und halten uns wie bei der Addition streng an die Spaltenschreibweise.

Aufgabenvorschläge

1) Sabrina macht Kassensturz

a) In ihrem Geldbeutel findet sie die Geldstücke:

1 Zwei-Euro-Stück, 3 × Ein-Euro, 2 × 50-Cent, 6 × 20-Cent, 2 × 10-Cent, 5 × 5-Cent, 4 × 2-Cent, 3 × 1-Cent. Wie viel Geld hat sie im Geldbeutel?

b) In ihrem Sparschwein hat sie noch 21,27 Euro. Wie viel Geld hat Sabrina insgesamt?

c) Sie hat ein schönes Geschenk um 8,25 für ihre Mutter entdeckt. Wie viel Geld würde ihr noch übrigbleiben?

2) Schreibe wie beim Kassenzettel untereinander und zähle zusammen:

Brot 2,45; Butter 1,24; Käse 3,89; Wurst 1,95; Obst 2,68

3) Wie viel Restgeld wird herausgegeben?

a) Du kaufst Äpfel für 1,46 und Bananen für 2,35. Alles zusammen bezahlst du mit einem 10-Euro-Schein.

b) Simon kauft 2 Hefte (je 0,60) und 3 Stifte (je 0,80), er bezahlt mit einem 5-Euro-Stück.

Ausdehnung auf 3 Kommastellen

Wie vorteilhaft sich das vertraute Geld mir seiner Hundertstel-Teilung eignet, um die Dezimalschreibweise einzuführen und zu benutzen, ist im Unterricht unmittelbar erlebbar. Die Kinder nehmen sowohl Schreibweise wie die Rechenregeln (Komma unter Komma) beim Addieren und Subtrahieren als selbstverständlich an. Aber genau darin zeigt sich auch der Nachteil der reinen Gewohnheit aus dem alltäglichen Umgang. Die Dezimalstellen werden meist als (ganze) Centbeträge gelesen und bis zum Hunderter-Übergang auf den (wiederum ganzen) Euro hinaufgezählt; dazu könnte sogar die Abkürzung (z) für „Zehntel“ - bei der 10-Ct-Münze als – fälschlicherweise „Zehn“ gedeutet werden. Die mathematisch begründete Lesart „Zehntel“ und „Hundertstel“ kann daher von den Schülern als etwas weltfremd empfunden werden.

Um dem entgegen zu wirken, können vor dem Übergang zu weiteren Dezimalstellen nochmals Bruchteile vom ganzen Euro geübt werden, wie sie bereits zu Beginn vorgeschlagen waren. Weil jede unserer Centmünzen sich als Bruchteil des ganzen Euro darstellen lässt, bietet unser Münzsystem durchaus Übungsfelder für die gegenseitige Entsprechung von gewöhnlichen Brüchen und Dezimalbrüchen. So im Unterricht dafür Zeit eingeräumt werden kann, sind interessante und für eine 4. Klasse durchaus anspruchsvolle Aufgaben damit möglich, sei es als Addition oder Subtraktion zuerst von echten Brüchen und als zweiten Rechenweg mit den entsprechenden Dezimalbrüchen bzw. Centbeträgen:

1/25 € + 1/100 € = ? Erweitern auf Hauptnenner 100: 4/100 € + 1/100 € = 5/100 € = 1/20 €

oder dezimal (mit Kenntnis der Bruchteile): 4 Ct + 1 Ct = 5 Ct = 0,05 €

entsprechend: 1/4 € - 1/20 € (Lsg: 4/20 € = 1/5 € bzw. 0,20 €)

oder dezimal: 25 Ct – 5 Ct

ebenso: 1/4 € + 2/5 € + 3/10 € + 1/20 € (Lsg: 20/20 € = 1 € bzw. 1,00 €)

oder dezimal: 25 Ct + 2×20 Ct + 3×10 Ct + 5 Ct

Unabhängig davon, ob eine solche Betrachtung gemacht werden konnte, wird nochmals die Lesart mit den Namen der Dezimalstellen von den Tausendern bis hin zu den Zehnteln und Hundertsteln erinnert. Nun kann man einen Benzinpreis erfragen oder auch selbst nennen und dann die Klasse über die Bedeutung der dritten Nach-Komma-Stelle rätseln lassen. Das Ziel, diese mit „Tausendstel Euro“ zu benennen, wird notfalls mit Lehrerhilfen erreicht.

Preise an der Tankstelle: Super 1,349 €/Liter; Diesel 1,225 €/Liter

Natürlich wird auch darauf hingewiesen, dass es für diese Preisangabe gar kein geeignetes Kleingeld gibt; wenn man also wirklich nur 1 Liter Super bezahlen wollte, müsste man eben 1,35 € begleichen. Obwohl wir in der 4. Klasse noch keine Rundungsrechnungen machen, sind Aussagen wie „fast 1,35 €“ oder „etwa 1,35 €“ oder „eigentlich 1,35 €, aber es soll nicht so aussehen“ durchaus mit der Klasse besprechbar.

Der Goldpreis ist für die Klasse wohl kaum gegenwärtig, allenfalls, dass dieses Metall wertvoll oder teuer sei. Der Lehrer kann berichten, dass der Preis sich im täglichen Handel an der Börse einpendelt und dann unter anderem im Wirtschaftsteil der Zeitung aufgelistet wird. Neben der international üblichen Benennung mit Dollar je Unze wird auch immer der Preis mit Euro je Gramm oder Kilogramm genannt, getrennt nach Ankauf und Verkauf, aber meist mit 5 bis 6 geltenden Ziffern.

Notierung Gold Ankauf: 30,5842 €/g; Verkauf: 31,5964 €/g

Auch hier sind die Dezimalen nach den Hundertsteln (=Cent) zunächst ohne Bedeutung, weil niemand 1 Gramm Gold kauft oder verkauft; der kleinste „Barren“ hat 100 Gramm und ist wegen des schweren Materials überraschend klein[43]. Bei den handelsüblichen Goldmengen kommen also die Nachkommastellen dann doch zur Wirkung. Der Hinweis darauf genügt, weil die Stellenverschiebung beim Malnehmen erst später eingeführt wird. Der Gebrauch von Zahlen mit der längeren Stellenzahl, sei es aus obigen oder aktualisierten Notierungen oder auch mit reinen Zahlen soll jedenfalls vertraut werden gemäß folgender

Übungen zum Lesen und Schreiben von Dezimalbrüchen

1. Lies die folgenden Dezimalbrüche

a) 2,1; 3,5; 4,2; 6,9; 1,7; 3,5; 9,9

b) 3,33; 4,44; 5,55; 6,66; 7,77; 8,88; 9,99

c) 1,23; 2,34; 3,45; 4,56; 5,67; 6,78; 7,89

d) 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7

e) 0,01; 0,02; 0,03; 0,04; 0,05; 0,06; 0,07

f) 0,1; 0,01; 0,001; 0,101 0,120 (die letzte Ziffer 0 kann mitgelesen werden, um die Genauigkeit auszudrücken, muss es aber nicht); 0,0909; 0,090

g) 246,78; 24,678; 2,4678; 0,24678; 0,024678; 2538; 253,8; 25,38; 2,538; 0,2538

2. Lies die Zahlen von Benzin- oder Goldpreisen gemäß dem Stellenwert ihrer Ziffern, z.B. bei 30,5842 €/g als „3 Zehner, 0 Einer, 5 Zehntel, 8 Hundertstel, 8 Tausendstel, 2 Zehntausendstel“

Rechen-Beispiele (ohne Überträge):

3. Gestern lag der Dieselpreis bei 1,239 €/Liter, heute nur noch bei 1,199 €/Liter. Um wieviel Cent ist Diesel billiger geworden?

(Differenz führt auf 0,030 €/l; mit der Lesart 3 Hundertstel ergeben sich 3 Ct/l; die Rechnung ist direkt möglich durch den alleinigen Unterschied in den Hundertsteln, ansonsten könnte die Spaltenschreibweise vom Kassensturz übernommen werden).

E,	z	h	t
1,	2	3	9
- 1,	2	0	9
0,	0	3	0

4a) Wie groß ist der Unterschied (=Handelsspanne) zwischen Verkaufs- und Ankaufspreis (31,5964 €/g - 30,5842 €/g) bei Gold?

[43] Nimmt man eine Barrengröße von nur 3 x 5 cm an, so genügt bereits eine Dicke von 3,5 mm, um 100 Gramm zu erreichen. Ein Goldbarren von der Größe einer 100-Gramm Schokoladentafel würde schon knapp 2 kg wiegen; in Filmen werden gelegentlich Barren in Ziegelsteingröße umgestapelt, aus echtem Gold hätten diese über ½ Zentner!

4b) Der Verkaufspreis von Gold steigt um 1,3024 €/g. Auf welchen Wert ist Gold gestiegen?

4c) Der Verkaufspreis von Silber beträgt 0,4985 €/g. Der Ankaufspreis liegt um 0,0415 €/g darunter. Wie hoch ist dieser?

Zweiter Weg: Die Konvention des Stellenwertes

Die Schreibweise der Zahlen im üblichen Stellenwertsystem ist den Kindern seit dem ersten Schuljahr bekannt. Sie wissen seit der 2. Klasse, dass 4523 die gemeinte Zahl nach Tausendern, Hundertern, Zehnern und Einern gegliedert angibt:

$4523 = 4 \cdot 1000 + 5 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 1.$

Von der 1 zur 10 gelangt man, indem man die 1 mit 10 multipliziert. Weiter gelangt man von der 10 zur 100, indem man wiederum mit 10 multipliziert. Durch erneute Multiplikation mit 10 geht es von 100 zu 1000. Dieses Prinzip, das zu immer größeren Einheiten führt, kehren wir nun in das Kleinerwerden um, indem wir in 10er-Schritten dividieren. 1 dividiert durch 10 ergibt 1/10, mit nochmaligem Dividieren erreichen wir 1/100.

Diesen Bruchteil erkennen die Kinder wieder: Beim Umgang mit dem Geld, aber auch mit dem Längenmaß hatten wir in der 3. Klasse die Hundertstel als 0,01 geschrieben. Allerdings benutzten wir statt „Hundertstel" den Alltagsnamen dieses Bruchteils und lasen 0,01€ als „1 Cent" oder 0,01m als „1cm".

Die Schreibweise des Zehntels wird noch kaum geläufig sein, kann aber nun leicht eingeführt werden. Wenn wir 1m in 10 gleiche Teile gliedern, hat jeder Teil 10cm oder 0,10m in der gewohnten Kommaschreibweise; ab jetzt nehmen wir dafür auch die einstellige Schreibweise 0,1m. Falls in Klasse 3 die weiteren Teilungen des Meters noch nicht benutzt wurden, sind sie jetzt sinnvoll und wir führen sie nun mit praktischen Beispielen ein bzw. wiederholen sie.

Das Tafellineal hat üblicherweise neben der cm-Teilung noch für jeden vollen Dezimeter einen Farbwechsel und die entsprechende Zählung: 1(dm), 2, ... bis 9 (dm).[44] Die Kinder dürfen verschiedene Stellen am Tafellineal zeigen, abzählen und benennen. Meist haben die Schüler wenigstens ein kleines Lineal in ihrem Mäppchen. Wir schauen die Feinteilung in mm an und beobachten den Übergang beim 10ten Strich auf die 1, wo wir den vollen ersten Zentimeter erreichen. Wie weit muss man mit Millimetern zählen bis man 1dm oder gar 1m erreicht hat?

Es werden spätestens jetzt die Wortbedeutungen der Maßvorsilben erklärt oder wiederholt: dezi = zehntel, centi bzw. zenti = hundertstel, milli = tausendstel. Für den ganzen Meter braucht man also 10 Dezimeter oder 100 Zentimeter oder 1000 Millimeter. Mit einer einfachen Zähltabelle im Heft gewöhnen sich die Kinder leicht an die neue Schreibweise:

Zählung mit		Zehnteln		Hundersteln		Tausendsteln
Anfang	0 dm	oder 0,0 m	0cm	oder 0,00 m	0mm oder	0,000 m
	1 dm	oder 0,1 m	10cm	oder 0,10 m	100mm oder	0,100 m
		...		...	...	
	9 dm	oder 0,9 m	90cm	oder 0,90 m	900mm oder	0,900 m
Ende (voller Meter)	10dm	= 1,0 m	100cm	oder 1,00 m	1000mm oder	1,000 m

Für einige Kinder ist der Schritt von 0,9 auf 1,0 noch befremdlich, dadurch kann der parallel geschriebene Übergang von 90 auf 100cm bzw. 0,90 auf 1,00m eine gute Unterstützung sein.

In der Klasse können wir eine ausgewählte Länge bestimmen, z.B. diejenige der Fensterbank. Das Tafellineal mit 1m lässt nach zweimaligem Anlegen einen Rest übrig. Nun helfen uns noch 4 Dezimeter des Lineals weiter. Mit dem kleinen Lineal sehen wir, dass noch

[44] Die Ziffern 0 und 10 fehlen sind oft, weil die entsprechenden Markierungen auf das Linealende fallen.

8cm und 5mm hineinpassen. Vertraut werden soll nun die Gleichwertigkeit der Sprech- und Schreibweisen:

2 (ganze) Meter 4 Dezimeter 8 Zentimeter 5 Millimeter

2 Einer (Komma) 4 Zehntel 8 Hundertstel 5 Tausendstel (Meter)

Durch dieses Verfahren der wiederholten Division des Längenmaßes durch 10 haben wir die bisherige Stellenschreibweise in die Dezimalbrüche fortgesetzt, von den Einern zu den Zehnteln, Hundertsteln und Tausendsteln. Ein Komma trennt die Einer von den Bruchteilen der Einheit. Statt 1/10 schreiben wir 0,1; statt 1/100 schreiben wir 0,01; statt 1/1000 schreiben wir 0,001. Zur Unterscheidung von den bisherigen (großen) Stellen kürzen wir die Dezimalstellen hinter dem Komma mit kleinen Buchstaben ab: Zehntel z; Hundertstel h; Tausendstel t.

Die obige Zahl mit der Ziffernfolge:

2 Einer (Komma) 4 Zehntel 8 Hundertstel...5 Tausendstel

oder: 2 E (Komma) + 4 z + 8 h + 5 t.

können wir auch mit „sichtbarer“ Bruchschreibweise darstellen:

2 · 1 (Komma) + 4 · 1/10 + 8 · 1/100 + 5 · 1/1000.

oder: 2 (Komma) + 4/10 + 8/100 + 5/1000.

Wir lesen aber nur „Zwei Komma Vier – Acht – Fünf“ und schreiben entsprechend auch „2,485“.

Die Addition und Subtraktion von Dezimalzahlen (Komma unter Komma)

Obwohl die Spaltenschreibweise für die schriftliche Addition und Subtraktion aus Klasse 3 bekannt ist, lohnt sich deren Wiederholung und Ausweitung auf Dezimalzahlen. Die Kopplung an Maße unterstreicht die Bedeutung des Kommas für die richtige Einordnung der Zahlen. Der gängige Kassenzettel ist zunächst sicher das einleuchtendste Beispiel.

Wir führen ein Kassenbuch über unser Taschengeld

Datum	**Vorgang**	**Einnahmen**				**Ausgaben**			
		Z	E			Z	E		
1. Januar	Bestand	**1**	**7,**	**4**	**1**				
2. Januar	von Oma		5,	0	0				
5. Januar	Getränk						1,	6	0
7. Januar	Radiergummi						0,	8	5
15. Januar	Taschengeld		4,	0	0				
24. Januar	Busfahrkarte						1,	2	5
28. Januar	Geschenk für Lisa Übertrag	+ 1				+	2, 2	9 1	8
31. Januar	Summe	**2**	**6,**	**4**	**1**		**6,**	**6**	**8**
	Abrechnung *Überträge*	- *1*	6, *1*	6 *1*	8				
1. Februar	Bestand	**1**	**9,**	**7**	**3**				

Der Vorschlag, ein Kassenbuch für das Taschengeld zu führen, trifft in einer 4. Klasse meist auf gute Resonanz. Wenn dafür Zeit eingeräumt werden kann, ist dies eine wirksame Übung der korrekten Schreibweise *Komma unter Komma,* denn ein Kassenbuch hat nur dann einen Wert, wenn es fachmännisch oder echt kaufmännisch, also zuverlässig und präzise geschrieben wird. Im Heft kann ein gemeinsames Beispiel dafür angelegt werden.

Einige (Haus-)Aufgaben mit zwei- und mehrzeilig aufgelisteten Summanden erhalten anfangs noch eine Kopfzeile, in der mit Abkürzungen der jeweilige Stellenwert benannt wird. Mit der Einschränkung auf „Tausend“ (T) bzw. „Tausendstel“ (t) ist dies bequem zu schreiben:

T	H	Z	E,	z	h	t
1	2	1	4,	6	7	2

+	3	6	8,	3	1	5
		1				
1	5	8	2,	9	8	7

Dabei kann es eine Hilfe sein, wenn die Einer mit einer gesonderten Spalte hervorgehoben und mit „ihrem“ Komma verbunden werden[45]. Der tiefer liegende waagrechte Unterstrich lässt Platz für die klein geschriebenen Merkzahlen der auftretenden Zehnerüberträge (Wechsel in das nächstgrößere Fach).

Dasselbe wird mit einfachen Subtraktionen geübt, anfangs ohne, dann mit zunehmend mehr Überträgen innerhalb der Rechnung. Egal, wie diese Stellenüberträge eingeführt und notiert wurden, empfiehlt sich nun eine Verkürzung von Schreib- und Sprechweise. Der Lehrer entscheidet sich für eine Methode; diese sollte an bisherige Gewohnheiten anschließen, sich aber zu einem praktikablen Verfahren automatisieren als verlässliche Fertigkeit in den Folgeklasssen.

a) Ein sehr beliebtes Vorgehen vermeidet das aktive Wegnehmen und ersetzt es durch additives Unterschiedbilden wie es beim Bezahlen an der Kasse üblich ist.

T	H	Z	E,	z	h	T
1	2	1	4,	6	7	2
–	3	6	8,	3	1	5
1	*1*	*1*			*1*	
	8	4	4,	3	5	7

In nebenstehendem Beispiel beginnt man wie bei der Addition mit der letzten Stelle. Zuerst entdecken wir, dass im Fach „t“ zu wenig vorhanden ist. Wir entnehmen dem vorangehenden Fach „h“ 1 (Hundertsel), wechseln es in 10 (Tausendstel) und haben dann im Fach „t“ den Vorrat 12; allerdings darf man nur etwas entleihen, wenn eine entsprechende Nachricht in der Kasse hinterlassen wird. Dies geschieht mit der kleinen ***1*** in Spalte „h“. Jetzt kann gefragt werden: „5 und ? ist 12“ – „5 *und* ***7*** (schreiben in Ergebniszeile) ist 12“. In der Spalte „h“ heißt es dann: „1 geliehen und 1 entnehmen macht 2, auf 7 hinauf brauchen wir noch ***5***“. Die Sprechweise kann dann noch weiter zurückgenommen werden auf: „5 *und* ***7*** ist 12 merke ***1*** , 1 und 1 ist 2 *und* ***5*** ist 7“.

b) Genauso möglich ist die subtraktive Unterschiedbildung mit der Sprechweise: „von 5 auf 12 *fehlt* ***7***, merke ***1*** ; 1 und 1 ist 2, auf 7 *fehlt* ***5*** “.

c) Aus mathematischer Sicht würde die aktive Subtraktion den tatsächlichen Sachverhalt korrekter wiedergeben. Sie ist zwar weniger beliebt, aber als Rechengewohnheit durchaus gleichwertig. Eine dafür mögliche Sprechweise kann heißen: „2 weniger 5 geht nicht, entleihe 1 (notieren in Vorspalte „h“), *12 weg 5 bleibt* ***7*** (schreiben in Ergebniszeile); 1 und 1 ist 2 , *7 weg 2 bleibt* ***5*** “.

Grundsätzlich ist zu empfehlen, alle Additionen und Subtraktionen von Dezimalzahlen immer untereinander (also in Spaltenschreibweise) durchzuführen. Mit dieser formalen Hilfe wird ein häufiger Schülerfehler vermieden, der besonders bei einstelligen Dezimalen vorkommt:

E,	z	h
6,	1	*0*
+2,	1	4
8,	2	4

> 2,8 + 3,4 wird fälschlicherweise zu 5,12 zusammengefügt, weil die Ziffern 8 und 4 nach dem Komma als 12 nach dem Komma gesehen werden, anstatt den nötigen Übertrag zu den Einern zu machen. Bei 6,1 + 2,14 zu 8,15 verführt die Lesart „Sechs-Komma-Eins“ und „Zwei-Komma-Vierzehn“ zur Addition von 1 + 14 als eigenständigem Block hinter dem Komma. Die Spaltenschreibweise betont dagegen den Stellenwert (wir lesen: „Zwei-Komma-Eins-Vier“) und lässt mit nebenstehender Notierung auch erkennen, dass beim oberen Summanden die „fehlende“ zweite Stelle den Bedeutungsinhalt „kein Hundertstel“ hat und daher mit 0 gefüllt werden darf.

[45] Es lohnt sich die Sonderstellung des „Einer“ zu betonen, denn er stellt die Mittelsymmetrie zwischen den Dezimalvielfachen (H;Z) und den Dezimalteilen (z;h) her. Oft wird das Komma mit dieser Funktion gesehen, was dann zu einem Widerspruch in der Symmetrie führt: (Z;E) gegen das Paar (z;h). Aus der Sicht der höheren Mathematik hat der Einer die „Nullte Stellung“ und der Zehner die Stellung „Erste nach links“, die Dezimale „Zehntel“ hat die Stellung „Erste nach rechts“: $H = 10^2 = 100$; $Z = 10^1 = 10$; $E = 10° = 1$; $z = 10^{-1} = 0{,}1$; $h = 10^{-2} = 0{,}01$

Endnullen hinter dem Komma beschreiben also nur den Zustand, dass keine weiteren Bruchteile mehr vorhanden sind; fehlende Endnullen haben dieselbe Bedeutung. Bei Zahlen ohne Komma (also ganze Zahlen) verschiebt dagegen das Anhängen oder Weglassen einer Null die Stellenanordnung der übrigen Ziffern um eins nach rechts oder links und damit den zugehörigen Stellenwert um das Zehnfache oder auf den zehnten Teil. Die Einordnung der Zahl in eine Stellentabelle unterdrückt diese Fehlerquelle.

Ein Schnelltest, ob die einzuübende Sprechweise wirklich gefestigt ist, lässt sich mit folgender Scherzfrage durchführen: „Wer ist größer: Null Komma Neun oder Null Komma Zehn?“ In der Tat verführt die inkorrekte Sprechweise rasch zu einem Fehlurteil, das sich aufklärt, sobald die Zahlen geschrieben werden.

Es ist also durchaus sinnvoll, die richtige Sprechweise immer wieder zu erinnern: Die Ziffern vor dem Komma lesen wir wie bisher als komplette Zahl, die Dezimalstellen hinter dem Komma als Ziffernfolge. Wir lesen also 22,22 *nicht* als „Zweiundzwanzig – Komma – Zweiundzwanzig“ *sondern* „Zweiundzwanzig– Komma – Zwei – Zwei“.

Aufgaben

Neben den Beispielen, die beim ersten Einführungsweg gegeben wurden, sind natürlich ähnliche Aufgaben leicht zu erfinden, sei es als reine Zahlenrechnung, sei es mit Sachbezug:

- Addiere a) 13,55 + 1,45 b) 3,066 + 1,54 c) 12,5 + 0,125 + 0,0415
- Subtrahiere a) 9,21 – 8,1 b) 1 – 0,3 c) 23,73 – 12,064
- Von einem 2m-Brett wird ein Stück der Länge 1,28m abgesägt. Wie lang ist der Rest?
- Für den Pudding wird benutzt: ½ Liter Milch (= 0,5kg), 0,05 kg Zucker, 0,03 kg Kakao und 0,015 kg Stärke. Wie schwer sind alle Zutaten insgesamt?

Die Multiplikation von Dezimalzahlen

Danach könnten wir zur schriftlichen Multiplikation und Division von Dezimalbrüchen übergehen, sofern dafür noch Zeit wäre. Es ergäbe sich jedenfalls eine sinnvolle Ergänzung des bisher Gelernten. Doch können wir es auch getrost der zweiten Epoche überlassen, wo es systematisch eingeführt wird; dann kann dieser Abschnitt als Einstieg genutzt werden. Falls dies hier aber noch möglich ist, beginnen wir mit einfachen Multiplikationen und Divisionen, die noch ohne „Staffel“ auskommen. Der Stellenname 1er, 10er, 10tel, 100tel wird zunächst noch mitgesprochen; dadurch wird der richtige Ort für das Komma erkannt. Hier wollen wir noch ohne Übertrag im Kommabereich auskommen, ansonsten wird er wie bisher von rechts nach links vorgenommen. Allenfalls die Sprechweise weicht von der bisherigen Gewohnheit ab: Hieß es bei 120 + 90 „2 Zehner plus 9 Zehner sind 11 Zehner oder 1 Zehner und 1 Hunderter“, so heißt es nun bei 0,12 + 0,09 „2 Hundertstel plus 9 Hundertstel sind 11 Hundertstel oder 1 Hundertstel und 1 Zehntel“, also sprachlich in scheinbar umgekehrter Reihenfolge, dennoch wie früher von rechts nach links. Vorbereitend kann man mündlich solche Aufgaben stellen wie:

Was ist das Doppelte von 1,22 €? Was ist das dreifache von 1,18 €?...

Entsprechend kann man fragen:

Was ist die Hälfte von 4,44 €? Was ist ein Drittel von 6,60 €?…

Dann werden Aufgaben dieser Art an die Tafel geschrieben und wie gewohnt stellenweise (von rechts nach links) abgearbeitet, zum Beispiel:

2 × 6,32 € 4 × 12,24 €… Oder auch 8,64 : 4; 4,52 : 2,…

Ebenso sind einfach Sachaufgaben möglich:

Das Blumenbeet hat einen Längsrand aus 3 Platten mit jeweils 1,25m Länge. Wie lang ist das Beet?

Carl stellt 6 Blumentöpfe auf die Schubkarre. Jeder wiegt 3,15 kg. Wieviel Gewicht hat er aufgeladen?

Gewöhnliche Brüche, Dezimalbrüche, Dezimalzahlen

Die gegenseitige Umwandlung von Bruchschreibweisen ist in der ersten Epoche noch nicht angebracht. Dennoch sind den Kindern einfache Bruchteile wie ½ und ¼ auch in ihrer Dezimaldarstellung aus dem Alltag bekannt. Bei der Einführung der Dezimalschreibweise über das Geld war eine ganze Reihe weiterer Bruchteile (1/5, 1/20, 1/50) dezimal beschreibbar mittels des geläufigen Kleingeldes. Bei Erinnerung an einen Maßbezug (Euro, aber auch Meter) wird dies sofort wieder gegenwärtig:

½ € = 50 Ct = 0,50 € oder ½ m = 50 cm = 0,50 m

entsprechend:

¼ € = 25 Ct = 0,25 € oder ¼ m = 25 cm = 0,25 m

Mit den dezimalen Bruchteilen haben wir bereits durchgehend gearbeitet:

1/10 = 1z = 0,1 1/100 = 1h = 0,01 usw.

Endnullen können wir zufügen oder weglassen: 0,5 = 0,50 = 0,500

und könnten jeweils als Bruch lesen: 5/10 = 50/100 = 500/1000

Somit können wir von den gewöhnlichen Brüchen wenigstens die einfachsten auch dezimal schreiben:

¼ = 0,25 =0,250 ½ = 0,5 = 0,50 = 0,500 ¾ = ½ + ¼ = 0,50 + 0,25 = 0,75 = 0,750

Alle diese Schreibweisen sind einander gleichwertig in nur unterschiedlichen Darstellungsformen.

Weil die Ziffern hinter dem Komma von fortlaufenden Zehner-Bruchteilen abstammen und entsprechend auch leicht mit den Nennern Zehntel, Hundertstel usw. klassifizierbar sind, wird der Name *Dezimalbruch* verständlich. Haben wir vor dem Komma (links davon) weitere belegte Stellen, erkennen wir darin die ganze Zahl, zu der noch Bruchteile (rechts vom Komma) angefügt sind. Es ist dann im korrekten Sinne ein unechter Bruch (der größer als ein Ganzes ist), aber immer noch ein Bruch. Für die Kinder ist der Begriff „Bruch" jedoch stark an einen Teil des Ganzen und an die Schreibweise mit dem Bruchstrich gebunden. Daher benennen sie diesen Zahlentyp lieber als *Dezimalzahl* oder einfach nur *Kommazahl*. Diese eher bildhaft empfundenen Begriffe entsprechen durchaus auch dem Alltagsgebrauch. Dem dürfen wir gerne nachgeben, auch wenn hier im Text mathematisch korrekt davon nicht Gebrauch gemacht wird.

Die gegenseitige Umwandlung von gewöhnlichen Brüchen (mit Bruchstrich) und Dezimalbrüchen (mit Komma) ist rein zeitlich in dieser ersten Epoche noch nicht möglich, wohl aber die Benennung von Dezimalen als echte Brüche:

0,5 = 5/10 0,3 = 3/10 0,04 = 4/100.

oder als Summe von Brüchen:

0,150 = 1/10 + 5/100

wobei die *führende 0* (Null) bei der Darstellung als Bruch nicht genannt wird, ebenso keine Endnull: Bei 0,150 haben wir keine Einer und keine Tausendstel, sie müssen also auch nicht als Bruch geschrieben werden; Stellen vor dem Komma lesen und schreiben wir bisher:

572,234 (gelesen: Fünfhundertzweiundsiebzig – Komma – Zwei – Drei – Vier)

= 5 · 100 + 7 · 10 + 2 · 1 + 2 · 1/10 + 3 · 1/100 + 4 · 1/1000.

Übungen

1. Schreibe die angegebenen Dezimalbrüche als Summe von gewöhnlichen Brüchen:

0,50; 0,45; 0,15; 0,101; 0,2155; 0,90807; 0,01; 0,005

2. Echte Brüche von Maßen können wir in Dezimalschreibweise umformen: ½ m = 0,5 m. Versuche es selbst mit:

a) ½ Liter b) ¼ Meter c) ¾ Kilogramm d) ½ cm e) 1/10 Liter

d) 6/100 mm (Dicke eines menschlichen Haares)

e) 35/100 Liter (Inhalt einer kleinen Limonaden-Flasche)

Rückblick und Vorblick

Die Epoche wird mit einem Rückblick auf alles neu Eingeführte und einem Vorblick auf die nächste Epoche abgeschlossen. Als großes Thema kündigen wir die Multiplikation und Division von Brüchen an, verbinden es aber mit dem erfreulichen Hinweis, dass diese – merkwürdigerweise – viel einfacher sein wird als die Addition und Subtraktion von Brüchen. Bei den Dezimalbrüchen sieht es wiederum umgekehrt aus, da bleiben Addieren und Subtrahieren einfacher, für das Multiplizieren und Dividieren werden wir dann vermehrte Übungszeit benötigen. Aber dass sich mit ihnen eine Fülle von Alltagsaufgaben lösen lässt und man sich dadurch im Leben besser auskennt, wird auch Ansporn sein.

Die zweite Epoche

In der ersten Rechen-Epoche wurden die behandelten Brüche bevorzugt unter dem Aspekt ihrer Größe betrachtet. Größenvorstellungen bildeten die Grundlage für die Addition und Subtraktion. Zwar benötigte die Suche des Hauptnenners einen ersten Blick auf die gegenseitigen Beziehungen von Zahlen, doch waren die Fragen nach Vielfachen oder Teilen noch streng an Größe und Erscheinungsform der Brüche gebunden. Durch geeignetes Kürzen und Erweitern wurden die Brüche in vergleichbare Formen (gemeinsame Nenner) gebracht, ohne die Größe der Brüche zu verändern.

In der zweiten Epoche achten wir stärker auf die gegenseitigen Größen-Verhältnisse. Malnehmen (Multiplizieren) und Teilen (Dividieren) wenden wir als *aktive* Rechenoperationen[46] auf Brüche und ganze Zahlen an; Brüche dürfen sogar selber als Bearbeiter auftreten, wenn auch zunächst nur als Multiplikator. Im Rückblick vom Ergebnis zum Anfangswert sehen wir die Wirkung der vorgenommenen Bearbeitung (Operation): Das Bild des eigenen Tuns weckt eine erste Empfindung für das gegenseitige *Verhältnis* von Anfangs- und Endzahl.

Die schriftlichen Verfahren der Grundrechenarten werden wiederholt und gründlich geübt. Dabei liegt der Schwerpunkt – wie beim Bruchrechnen – auf Division und Multiplikation, die nun mit einfachen Aufgaben auf Dezimalzahlen ausgedehnt werden. Die Rechenepoche wird daher mit mündlichen Übungen und Kopfrechnen begleitet, bei denen das Einmaleins als tägliches Handwerkszeug aufgerufen ist.

Für eine bestimmte Reihenfolge, in der diese beiden Stoffgebiete behandelt werden, gibt es keine schwerwiegenden Entscheidungsgründe. Für den Beginn mit den Dezimalzahlen spricht allenfalls, dass sie an das Ende der ersten Epoche anschließen. Der Lehrer kann nach Bedarf wählen; es ist sogar denkbar, dass täglich sich beide Gebiete den Hauptunterricht teilen.

Arbeiten mit Brüchen

Die Weiterführung der Bruchrechnung wird getragen durch das Wiedererkennen der während der 1. Epoche eingeführten Begriffe. Sie sollen nun beim Lösen der folgenden Wiederholungsaufgaben erinnert und dann auch frei verfügbar werden. Die Kinder können damit ihr Vorgehen sachlich beschreiben und verstehend einordnen. Bei der Addition und

[46] Siehe Band 1 und Band 3 dieser Reihe

Subtraktion genügt es, wenn wir Aufgaben mit zwei Brüchen und gut auffindbarem Hauptnenner wieder sicher bewältigen. Den nächsten Schritt bei dieser Rechnungsart behalten wir der 5.Klasse vor. Dort werden wir auch das nötige Rüstzeug dazu erwerben.

So kann Freiraum bleiben, um noch einen echt neuen Gesichtspunkt zu erringen. Brüche beschreiben in der Mathematik nicht nur als Größen die Bruchstücke von Dingen und werden als solche auch bei der Rechnung behandelt. Sie können auch selber zum Behandler von Zahlen werden. Dies kann in der 4. Klasse noch eher spielerisch erfolgen. Aber es wird ein erstes Gefühl dafür entstehen, dass in den Brüchen noch künftige Fähigkeiten schlummern. Als Vorblick darf der Lehrer das Ziel bereits ins Auge fassen: *Jeder Bruch ist (auch) eine Bearbeitungsvorschrift*.

Tipps zur Schreibweise

Vermehrt wird es nun nötig, dass die Darstellungsform eines Zahlwertes anzupassen ist, um den Lösungsweg gangbar zu machen. Die Rechenregeln dazu sichern nur ab, dass die Formänderung fehlerfrei bleibt. So bleibt der Zahlenwert von Brüchen bei richtigem Kürzen und Erweitern erhalten trotz veränderter Erscheinungsform, doch welche Art der Änderung wirklich zielführend ist, muss vom Schüler vorher selbst entschieden werden. Erste Strategien dazu wurden bereits in der ersten Epoche benutzt und werden nun weiter entwickelt.

Unabhängig davon bedarf es einer geeigneten Schreibweise in der Klasse, mit der solche Formänderungen gezeigt oder geschrieben werden können. Die vom Lehrer einmal gewählte Darstellungsweise sollte in sich schlüssig sein und möglichst auch dauerhalft beibehalten werden. Es lohnt sich außerdem, dass auf die sorgfältige Schreibweise mit waagrechten Bruchstrichen auf gleichbleibender Höhe – an der Tafel wie im Heft – geachtet wird: dies mindert die Fehlerquellen erheblich!

Beim Kürzen und Erweitern besteht die Möglichkeit, den geschriebenen Bruch mit der Kürzungs- bzw. Erweiterungszahl und dem Rechenzeichen (geteilt oder mal) zu ergänzen. Dann ist der Rechenweg zum neuen (aber gleich großen) Bruch deutlich erkennbar. Um diese vom Schüler absichtliche vorgenommene Änderung kenntlich zu machen, empfiehlt sich dazu eine andere Farbe. Wenn also ein blauer Füller zu Schreiben benutzt wird, ist dazu ein Bleistift oder Buntstift geeignet – letzterer natürlich nicht rot („Lehrerfarbe!"), sondern anders, wohl am besten grün.

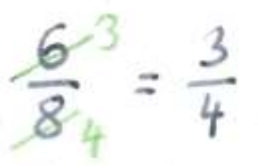
Abb. 22: Erweitern und Kürzen mit Notiz

$$\frac{2\cdot 2}{3\cdot 2} = \frac{4}{6} \qquad \frac{6:2}{8:2} = \frac{3}{4} \qquad \frac{12:2}{18:2} = \frac{6:3}{9:3} = \frac{2}{3}$$

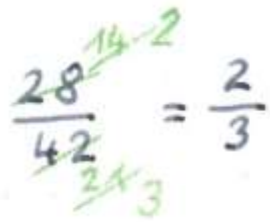
Erweitern | Kürzen | mehrfaches Kürzen

Beim mehrfachen Kürzen, wie es bei großen Brüchen vorkommen mag, ergeben sich dann entsprechend mehr Schritte, die nacheinander zu schreiben sind. Wenn entsprechende Routine erreicht ist, kann man erlauben, dass ohne Notieren der Kürzungszahl paarweise Zähler und Nenner gestrichen und durch die jeweiligen gekürzten Zahlen ersetzt werden. Der Rechenweg ist dann aber kaum mehr überprüfbar, weil der benutzte Teiler nicht sichtbar ist.

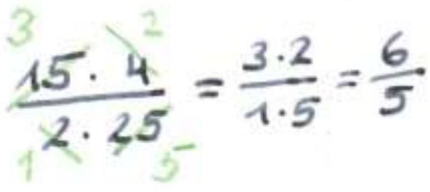
Abb. 23: Erweitern und Kürzen ohne Notiz



Kürzen



mehrfaches Kürzen



gekennzeichnete Kürzungs-Paare

Wiederholung

Zu Beginn der zweiten Epoche werden wir noch einmal die wesentlichen Schritte auf unserem Weg zur Bruchrechnung durchgehen, jeweils illustriert durch geeignete Zahlenbeispiele. Dabei erinnern sich die Kinder an Herkunft und Bedeutung der Bruch-Schreibweise, die erlernten Rechenfertigkeiten werden wieder aufgefrischt:

1. Wenn ein Ganzes gleichmäßig eingeteilt wird, erhalten wir Bruchteile in Form von *Stammbrüchen*. Der *Nenner* sagt uns, wie viele Teile wir gemacht haben. Alle Teile sind zusammen so groß wie das Ganze.

So erhalten wir beim Vierteilen (oder Vierteln) eines Ganzen 4 Viertel:

1 = ¼ + ¼ + ¼ + ¼

2. Nehmen wir einen Stammbruch mehrfach, so schreiben wir die Anzahl als *Zähler*.

Wenn wir zum Beispiel dreimal ein Viertel haben, dann sind diese so viel wie ein Dreiviertel: ¼ + ¼ + ¼ = 3 × ¼ = ¾

3. Vom *Nenner* erfahren wir den *Namen* der Bruchteile. Ein Bruch mit größerem Nenner hat die kleineren Teile, oder: *Je größer der Nenner, desto kleiner die Teile und damit der Bruch*.

Beispiele: 1/16 ist kleiner als 1/12; 2/5 sind kleiner als 2/3

4. Vom *Zähler* erfahren wir die *Anzahl* der Bruchteile. Ein Bruch mit größerem Zähler hat mehr Teile, oder: *Je größer der Zähler, desto größer der Bruch.*

Beispiele: 3/5 sind mehr als 2/5; 5/8 ist größer als 4/8

5. Wenn wir beim Verteilen mehr Portionen machen sollen als Ganze vorhanden sind, müssen wir Bruchteile machen; es entstehen *echte Brüche*, die kleiner als ein Ganzes sind. Wir erkennen sie daran, dass ihr Zähler kleiner als ihr Nenner ist.

Beispiele: 2 : 3 = 2/3; 3 : 7 = 3/7 (An Realbeispielen erläutern)

6. Wenn wir beim Verteilen mehr Ganze haben, als wir Portionen machen sollen, entstehen *unechte Brüche*, die größer als ein Ganzes sind. Wir erkennen sie daran, dass ihr Zähler größer als ihr Nenner ist.[47]

7 : 3 = 7/3

7. Wenn wir einen Bruch erweitern, erhalten wir zwar mehr Stücke, dafür aber kleinere; der Wert des Bruches bleibt dabei gleich, er ändert nur sein Aussehen. Wir nehmen dazu Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl mal. Dies nennen wir *Erweitern*.

Beispiel: 3/7 = 6/14 = 9/21 = 12/28 = ...

8. Wenn Zähler und Nenner eine gleiche Zahl enthalten, so können wir beide durch diese Zahl teilen. Dadurch erhalten wir zwar weniger, dafür aber größere Stücke; der Wert des Bruches bleibt dabei gleich, er ändert nur sein Aussehen. Dies nennen wir *Kürzen*.

Beispiel: 64/96 = 32/48 = (= 16/24 = 8/12 = 4/6) = 2/3

[47] Die Unterscheidung von echten und unechten Brüchen ist – mathematisch gesehen – nicht besonders wichtig und in der späteren Algebra auch nicht mehr sinnvoll.

Erweitern und Kürzen verändern Zahl und Art der Teile, nicht aber den Wert eines Bruches.

9. Vergleichen, zusammenzählen und abziehen können wir nur Brüche mit gleichem Nenner.

Beispiele: 4/9 + 2/9 = 6/9;   oder umgekehrt: 6/9 – 2/9 = 4/9;

oder als Vergleich: 6/9 ist größer als 4/9 bzw. genau um 2/9 sind 6/9 mehr als 4/9;

10. Bei Brüchen mit verschiedenen Nennern suchen wir erst den *Hauptnenner*. Wenn wir die beiden Einzelnenner jeweils ihre Einmaleins-Zahlenreihe durchlaufen lassen, klingen die beiden Rhythmen im Hauptnenner (und seiner Reihe) zusammen. Dann erweitern die Brüche auf diesen gefundenen Hauptnenner. Danach können wir zusammenzählen oder abziehen.

Beispiele:

a) Addition   1/6 + 2/9 = ?

Die 6er-Reihe und die 9er-Reihe klingen zum ersten Mal bei 18 zusammen. Dies ist der gemeinsame (Haupt-)Nenner, auf den wir erweitern müssen.

Erweitern: 1.Bruch: 1·3 / 6·3 = 3/18; 2.Bruch: 2·2 / 9·2 = 4/18

Zusammenzählen: 1/6 + 2/9 = 3/18 + 4/18 = 7/18

b) Subtraktion   8/15 – 3/10 = 8·2 / 15·2 – 3·3 / 10·3 = 16/30 – 9/30 = 7/30

11. Im Rahmen des täglichen Kopfrechnens bilden wir Bruchteile, die sich als ganze Zahlen ausdrücken lassen. Diese Wiederholung veranschaulicht Brüche im rein Zahlenmäßigen; Teilbarkeit und gegenseitige Zahlen-Beziehungen werden lebendig gepflegt, dazu wird das Malnehmen mit Brüchen vorbereitet: „Wie groß ist ein Drittel von 12?“

Zahlenreihen nach der Art:

1/3 von 6 1/3 von 9   1/3 von 12   1/3 von 15   usw.

lassen sich auf alle Einmaleins-Reihen ausdehnen, wodurch diese wieder unter einem ganz neuen und erfrischenden Ansatz wiederholt werden können.

12. Noch mehr Beweglichkeit verlangt die rückwärtige Fragestellung:

„Welchen Anteil hat die Zwei an der Sechs?“ oder: „2 ist welcher Bruchteil von 6?“ mit der Antwort: „Zwei ist ein Drittel von Sechs“

Auch hier können wieder die Einmaleins-Reihen durchlaufen werden:

7 = ? von 14   7 = ? von 28   7 = ? von 42   7 = ? von 56

Alle wichtigen Arbeitsarten mit Brüchen können eingangs oder an passender Stelle mit entsprechenden Aufgabentypen wieder aufgegriffen und vertieft werden; sie eignen sich – mit entsprechend einfachen Zahlen – auch für das tägliche Kopfrechnen:

Aufgaben-Vorschläge zur Wiederholung und Vertiefung

1. a) Ein Ganzes wurde in 8 gleiche Teile geteilt; wir machen aus jedem Teil durch halbieren nochmals zwei. Wie viele Teile haben wir nun insgesamt und wie heißen sie?

b) Wie groß ist die Hälfte von einem Viertel?

c) Von einem Viertel nehmen wir nur seinen vierten Teil. Wie groß ist dieser?

d) Mit einem Liter Saft wurden 9 Becher bis zur gleichen Höhe gefüllt. Wie viel von einem Liter kam in jedem Becher?

2. a) 1/5 + 1/5 + 1/5 = ?   b) 3 × 1/8   c) 5 × 1/12   d) 1/9 + 1/9 + 1/9 + 1/9

3. a) Welches ist das größte Stück, welches das kleinste von diesen vier:

1/12 ; 1/36 ; 1/8 ; 1/38

b) Welcher Bruch ist jeweils der kleinere von beiden:

4/7 oder 4/8?; 8/6 oder 8/8?

c) Wer ist größer: 1/6 oder 1/8?; 15/30 oder 15/120?

4.a) Welches ist das größte, welches das kleinste Stück von diesen vier:

8/12 ; 11/12 ; 1/12 ; 10/12

b) Welcher Bruch ist jeweils der kleinere von beiden:

7/8 oder 4/8?; 6/9 oder 8/9?

c) Wer ist größer: 6/10 oder 8/10?; 81/80 oder 79/80?

5. a) Drei Äpfel sollen an 4 Kinder verteilt werden. Wie viel bekommt jedes?

b) Die Oma sagt zu ihren 3 Enkeln: „Ich habe leider nur noch zwei Nusskränzchen für Euch übrig. Könnt ihr sie richtig aufteilen?“

c) Aus dem großen Topf werden 3 Liter Tee zu gleichen Teilen in 5 kleinere Kannen gefüllt. Wie viele Liter befinden sich in jeder?

6. a) Verteile 5 Ganze auf 4 Portionen.

b) Teile 9 in 5 gleiche Portionen auf.

c) 20 verteilt an 8

7. a) Erweitere 4/9 mit 5 b) Erweitere ¾ zu ?/24 c) 7/9 = 21/? d) Wie viel Dreißigstel sind drei Zehntel?

8. a) Kürze 35/56 durch 7 b) Wie viel Achtel sind 24/72?

c) Kürze 96/144 soweit wie möglich d) Vereinfache 54/81

9. a) 3/8 + 2/8 b) 7/12 – 5/12 c) 25/ 32 – 14/32 d) 5/36 + 11/36

10. a) ½ + ¼ = ? b) 1/6 + 1/12 c) 1/4 + 5/12 d) 3/8 + 3/16

e) ½ - ¼ f) 7/12 – ¼ g) 5/8 – 3/16 h) 5/10 – 2/5

i) Wer ist größer: 2/3 oder 3/5? (Erweitere beide zu Fünfzehntel und vergleiche dann!)

11 a)	¼ von 8	¼ von 12	¼ von 16	¼ von 20 ...
b)	1/5 von 10	1/5 von20	1/5 von 30	1/5 von 40 ...
c)	1/8 von 80	1/8 von 120	1/8 von 160	1/8 von 200 ...

12 a) 3 ist welcher Teil von 12? Lösung: 3 ist ¼ von 12

5 ist welcher Teil von 10? 3 ist welcher Teil von 15?

6 ist welcher Teil von 18? 4 ist welcher Teil von 32?

12 b)	12 = ? von 24	8 = ? von 32	5 = ? von 20	3 = ? von 21
	9 = ? von 36	7 = ? von 21	11 = ? von 55	12 = ? von 60
12 c)	4 = ? von 8	4 = ? von 12	4 = ? von 16	4 = ? von 20
	9 = ? von 18	9 = ? von 27	9 = ? von 36	9 = ? von 45
12 d)	12 = ? von 36	15 = ? von 30	2 = ? von 24	7 = ? von 35
	15 = ? von 60	2 = ? von 32	11 = ? von 99	12 = ? von 144
	9 = ? von 72	7 = ? von 49	6 = ? von 72	5 = ? von 100

Gemischte Zahlen

Wenn in der Klasse die Ergebnisse von Bruchrechnungen verglichen werden, können die Schüler immer wieder davon überrascht werden, dass diese voneinander abweichen und trotz Verschiedenheit vom Lehrer als richtig anerkannt werden. Vielleicht erinnern sich einige Schüler daran, dass in der 1. Klasse auch schon verschiedene Ergebnisse möglich waren, ohne deswegen zwingend falsch zu sein. Damals war es die Frage nach möglichen Gliederungen einer Zahl, also nach möglichen Summanden einer vorgegebenen Summe. Doch auf dem umgekehrten Weg von den Summanden zur Summe war das Ergebnis stets eindeutig. Das scheint bei einer einfachen Summe von Brüchen nicht notwendig zu sein:

½ + 1/3 + ¼ + 1/6 = 6/12 + 4/12 + 3/12 + 2/12 = 15/12

Einige Schüler werden entdecken, dass Zähler und Nenner den Teiler 3 gemeinsam haben und somit kürzbar sind auf:

15/12 = 5/4.

Damit Ergebnisse leichter vergleichbar werden, einigen wir uns darauf, dass wir es immer soweit wie möglich kürzen.

Alltagsgebrauch

Wenn man nun wissen will, wie groß denn das Ergebnis 5/4 eigentlich ist, kann zunächst „über eins" oder „mehr als eins" genannt werden bis hin zur Präzisierung „ein Viertel mehr als eins" oder „ein Ganzes und ein Viertel". Damit haben wir schon 3 Ergebnisdarstellungen, die gleichwertig sind:

15/12 = 5/4 = 1¼

Diese Kombination von Ganzen und (echten) Bruchteilen ist vielen Kindern mit einfachen Beispielen aus dem Alltag bekannt, etlichen auch mit der üblichen Schreibweise 1¼; vergleichbar bekannt könnten noch andere Größen wie 1½ und 2½ sein. Wir können diese beiden Zahlen in „richtige" Brüche umwandeln lassen und erfahren 1½ = 3/2 und 2½ = 5/2. Nach dem Darstellungsart befragt werden die Kinder von selbst auf Formulierungen wie „Mischung" oder „Kombination" von ganzer Zahl und Bruch kommen, die wir dann mit dem Begriff *gemischte Zahl* präzisieren. Dass damit die Größe der Zahl besser erfassbar ist, werden sie als Vorteil dieser Schreibweise gerne annehmen.

Mit einigen Beispielen:

7/4 ; 11/2 ; 7/5 ; 11/3

lassen wir die Kinder den Rechenweg selbst finden bis hin zur Beschreibung:

Wir nehmen alle Ganzen heraus, bis nur noch ein echter Bruch übrig bleibt.

Bei 11/3 könnten zunächst mehrere Möglichkeiten denkbar sein: 11/3 = 1 + 8/3 oder 2 + 5/3; aber erst bei 11/3 = 3 + 2/3 werden wir die wirklich zufriedenstellende Form erreicht haben. Obwohl alle anderen Schreibweisen auch richtig sind und aufgrund der „Mischung" von Ganzen und Bruch den Anspruch auf den Namen „gemischte Zahl" erheben können, einigen wir uns auf die

Regel:

Unechte Brüche können wir in gemischte Zahlen verwandeln, indem wir die enthaltenen Ganzen herausziehen und getrennt ausweisen.

Eine gemischte Zahl ist eine Summe, bestehend aus Ganzen und einem echten Bruch.

In unserem Beispiel

$$\frac{11}{3} = 3 + \frac{2}{3} = 3^2/_3$$

schreiben wir das Ergebnis $3^2/_3$ ausdrücklich mit schrägem Bruchstrich wie im Fließtext, um darauf hinzuweisen, dass es sich um eine Summe handelt.[48]

Rechnen mit gemischten Zahlen

Generell werden wir die Kinder dazu anhalten, Rechnungen mit gemischten Zahlen zu vermeiden, indem wir sie durch unechte Brüche (geschrieben mit waagrechtem Bruchstrich) ersetzen. So umgehen wir unnötige Komplikationen beim Rechnen.

Dennoch können wir bei besonderem Interesse oder auf Rückfragen anhand einfacher Zahlen das Prinzip aufzeigen, mit dem Addition und Subtraktion durchgeführt werden. Wir

[48] Der schräge Bruchstrich soll auf die Bedeutung „gemischte Zahl" und das nicht geschriebene Rechenzeichen „plus" hinweisen. Dies soll Verwechslungen vorbeugen, weil in der Mathematik ein fehlendes Rechenzeichen normalerweise eine Multiplikation bedeutet.

bearbeiten die ganzen Anteile getrennt von den Bruchanteilen, letztere müssen notfalls gleichnamig gemacht werden:

Bei 2 ¼ + 1 ½ addieren wir erst die Ganzen: 2 + 1 = 3 und dann die Brüche: ¼ + ½ = ¾

und fügen danach beide zum Ergebnis 3¾ zusammen, die Rechenzeile dazu heißt:

2 ¼ + 1 ½ = 2 + 1 + ¼ + ½ = 3 + ¾ = 3¾

Genauso ist die Subtraktion getrennt nach Ganzen und Bruchteilen möglich, wobei der Wechsel der Rechenzeichen innerhalb der durchgehenden Rechenzeile irritieren kann:

$6\,{}^{5}/_{6} - 2\,{}^{1}/_{3}$ = ? Erst die Ganzen: 6 – 2 = 4; dann die Brüche: ${}^{5}/_{6} - {}^{2}/_{6} = {}^{3}/_{6} =$ ½

mit den Ergebnis 4 ½ oder als komplette Rechenzeile:

$6\,{}^{5}/_{6} - 2\,{}^{1}/_{3} = 6 - 2 + {}^{5}/_{6} - {}^{2}/_{6} = 4\,{}^{3}/_{6} =$ 4½

In einer algebraisch korrekten Darstellung müssten Klammern gesetzt werden, um die Verbindungen von ganzer Zahl und Bruchanteil zu schützen in der Form:

$(6 + {}^{5}/_{6}) - (2 + {}^{1}/_{3}) = 6 + {}^{5}/_{6} - 2 - {}^{1}/_{3} = 6 - 2 + {}^{5}/_{6} - {}^{2}/_{6} = 4\,{}^{3}/_{6} =$ 4 ½

Damit würde sichtbar gemacht, dass in diesem Beispiel 2 *und* ${}^{1}/_{3}$ zu subtrahieren sind. Weil der Erklärungsbedarf die Möglichkeiten einer 4. Klasse erschöpft, werden wir die Kinder damit auch nicht unnötig belasten. In gesteigertem Maße trifft dies auf die Multiplikation und Division zu –der Vollständigkeit halber wird dies dennoch im nächsten Abschnitt ergänzt.

Der für die 4. Klasse sichere Rechenweg wird aber für uns immer über die *Umwandlung zu unechten* Brüchen führen:

2 ¼ + 1 ½ = 9/4 + 3/2 = 9/4 + 6/4 = 15/4 = 3 ¾ oder

$6\,{}^{5}/_{6} - 2\,{}^{1}/_{3}$ = 41/6 – 7/3 = 41/6 – 14/6 = 27/6 = 9/2 = 4½

Ergebnisse mit gemischten Zahlen

Die gute Überschaubarkeit der gemischten Zahlen und ihre beliebte Verwendung im Alltag sind die wesentlichen Gründe, warum sie überhaupt besprochen werden. Auf das Rechnen mit ihnen können wir verzichten. Aber wir setzten sie gerne ein, um das Endergebnis in die bestmögliche alltagstaugliche Form zu bringen:

Ist das Endergebnis einer Rechnung ein Bruch, so kürzen wir diesen immer soweit wie möglich. Die Größe eines unechten Bruchs erfahren wir am besten, indem wir die Ganzen herausziehen und das Ergebnis als gemischte Zahl schreiben.

Beispiele: 7/12 – 1/36 = 7×3 / 12×3 – 1/36 = 21/36 – 1/36 = 20/36 = 5/9

$1\,{}^{7}/_{8}$ + 11/24 = 15/8 + 11/24 = 45/24 + 11/24 = 56/24 = 7/3 = $2\,{}^{1}/_{3}$

oder: 56/24 = $2\,{}^{8}/_{24} = 2\,{}^{1}/_{3}$

Division mit Rest

Bei den Grundrechenarten mit natürlichen Zahlen fiel die Division als die schwierigste auf, vor allem wenn sie schriftlich durchzuführen war – sofern dies in Klasse 3 überhaupt noch eingeführt werden konnte. Divisionsaufgaben mussten auch noch so vorbereitet sein, dass sie beim Rechnen glatt aufgingen. Andernfalls blieb ein Rest übrig, der nicht verteilt werden konnte.

Die Aufgabe 18 : 4 ergab beim Dividieren 4 mit einem noch nicht aufgeteilten Rest 2. Bei der meist üblichen Schreibweise

18 : 4 = 4 Rest 2

ist das Gleichheitszeichen mathematisch nicht korrekt und auch das Ergebnis nicht eindeutig. Es gibt eine Fülle von Divisionsaufgaben, bei denen das Ergebnis ebenso geschrieben würde, ohne deswegen gleich groß zu sein:

26 : 6 = 4 Rest 2 oder auch 30 : 7 = 4 Rest 2

Die gemischten Zahlen ermöglichen nun eine zuverlässige und eindeutige Ergebnisdarstellung bei Divisionen mit Rest, indem letzterer als echter Bruch geschrieben wird. Dem seit der 3.

Klasse verstärkt auftretende Streben nach absoluter Gerechtigkeit kann nun voll entsprochen werden: Jede beliebige Anzahl ist restlos und gerecht aufteilbar und sogar mathematisch korrekt darstellbar, indem der noch zu verteilende Rest (hier: 2) mit dem jeweiligen Teiler als Nenner versehen und als Bruch dazu gefügt wird:

$18 : 4 = 4\,{}^{2}/_{4} = 4\,½$

$26 : 6 = 4\,{}^{2}/_{6} = 4\,{}^{1}/_{3}$

$30 : 7 = 4\,{}^{2}/_{7}$

Doch auch hier können wir auf eine ausführliche Darstellung verzichten, indem wir auf unechte Brüche ausweichen und dann die Ganzen herausziehen.

$18 : 4 = 18/4 = 4\,{}^{2}/_{4} = 4\,½$

$26 : 6 = 26/6 = 4\,{}^{2}/_{6} = 4\,{}^{1}/_{3}$

$30 : 7 = 30/7 = 4\,{}^{2}/_{7}$

An der eigentlichen Rechnung ändert sich natürlich nichts, weil dieses Herausziehen die Division nur verlagert auf die Fragestellung „wie oft sind 4/4 in 18/4 enthalten?“ und dann doch wieder 18 durch 4 zu teilen sind.

Wenn das Teilen nicht aufgeht, können wir nun auch den Rest gerecht verteilen als Bruch. Das Gesamtergebnis kann als gemischte Zahlen geschrieben werden.

Aufgaben

1) Ziehe die Ganzen heraus (Verwandle in gemischte Zahlen):

a) 5/4 b) 9/5 c) 12/4 d) 17/8 e) 20/3 f) 55/22

2) Teile restlos auf (Ergebnis als gemischte Zahl)

a) 17 : 4 = ? b) 15 : 2 c) 20 : 6 d) 100 : 48 e) 57/38 f) 91/42

Multiplizieren und Dividieren von Brüchen

Gut vertraut ist im Grunde seit Beginn des Bruchrechnens das Malnehmen von Stammbrüchen mit ganzen Zahlen. Dieses Vorgehen führte uns ja erst zum Begriff des Zählers und damit zu den gewöhnlichen Brüchen. Obwohl bei der Wiederholung bereits daran erinnert wurde, lohnt es sich, das Malnehmen von Brüchen damit vorzubereiten.

Multiplizieren von Stammbrüchen

Ein sinnvolles Bild vergegenwärtigt uns nochmals die Aufgabenstellung: „6 mal ¼ “ heißt „6 mal je ein Viertelstück (z.B. Apfelschnitz) nebeneinander – wie viel ist das?“ Der neue Zähler muss nun einfach alle Stücke abzählen, also:

6 · ¼ = ¼ + ¼ + ¼ + ¼ + ¼ + ¼ = 6/4

Am Schluss wird durch Kürzen oder Herausziehen von Ganzen das Ergebnis so vereinfacht, dass seine tatsächliche Größe leicht überschaut werden kann:

6 · ¼ = 6/4 = 1 2/4 = 1 ½ oder = 6/4 = 3/2 = 1 ½

Übungen

1. Mit ganzzahligem Ergebnis:

a) 4 × ½ b) 12 × 1/3 c) 9 × 1/3 d) 12 × ¼ e) 20 × 1/5 f) 12 × 1/6

2. Mit echten Brüchen als Ergebnis, kürzbar

a) 2 × ¼ b) 3 × 1/6 c) 6 × 1/8 d) 9 × 1/12 e) 4 × 1/8 f) 5 × 1/15

3. Mit unechten Brüchen als Ergebnis (Ganze herausziehen)

a) 3 × ½ b) 5 × ¼ c) 11 × 1/8 d) 4 × 1/3 e) 10 × 1/3 f) 8 × 1/5

4. Beim Ergebnis Ganze herausziehen und kürzen

a) 10 × ¼ b) 8 × 1/6 c) 10 × 1/8 d) 15 × 1/12 e) 9 × 1/6 f) 12 × 1/8

5. Vermischte Aufgabentypen

a) 5 × 1/6 b) 3 × 1/5 c) 4 × 1/6 d) 18× 1/8 e) 9 × 1/6 f) 12 × 1/15

Multiplizieren von gewöhnlichen Brüchen

Bei den Stammbrüchen gab der Multiplikator noch direkt die Anzahl der Teile vor und blieb im Zähler des Ergebnisses sichtbar. Anders wird es erst, wenn der malzunehmende Bruch einen von 1 verschiedenen Zähler hat:

Auf unserer Festtafel sind die Kuchen in schmale Sechzehntel-Stücke aufgeschnitten. Nach dem Fest geben wir unseren Besuchern davon mit. Wir stellen jeweils 3 Stücke auf einen Pappteller zusammen. Wie viel Kuchen befindet sich insgesamt auf vier Tellern?

Zunächst wird man die Lösung möglichst anschaulich suchen, indem man die Sechzehntel-Stücke als Portionsgröße (d.h. als zählbare „Einheit") auffasst und diese entsprechend mehrfach nimmt:

> 1 Teller trägt 3 Stücke; 4 Teller tragen 4 × 3 Stücke, also 12 Stücke; mit dem Namen Sechzehntel ist wiederum der Bezug zum ursprünglichen Ganzen möglich: Es sind insgesamt 12/16 vom ganzen Kuchen.

Sobald wir auf den bildhaften Zwischenschritt mit den abzählbaren (Teil-) Stücken verzichten, bleibt der durchgehende Bezug zum Ganzen erhalten und wir erreichen den Übergang zum echten Bruchrechnen. Die Lösung der obigen Aufgabe würde dann so formuliert:

> Auf einem Teller liegen jeweils 3/16 des (ganzen) Kuchens.
>
> Auf 4 Tellern liegen dann 4 × 3/16 = 12/16 des (ganzen) Kuchens.

Die Multiplikation des Zählers machen wir durch einen Zwischenschritt sichtbar

$4 \times {}^{3}/_{16} = {}^{4\times 3}/_{16} = {}^{12}/_{16} = \frac{3}{4}$ (nach Kürzen durch 4)

und erkennen die

Multiplikationsregel:

> *Beim Malnehmen eines Bruches mit einer ganzen Zahl müssen wir nur dessen Zähler malnehmen.*[49]

Natürlich können wir auch auf eine solche stark an die äußere Anschauung fixierte Herleitung verzichten, indem wir uns daran erinnern, welchen Auftrag der Zähler hat: Er zählt die vorhandenen Bruchstücke. Bei 3/16 sind dies 3 Stück der Sorte „Sechszehntel" und wir wollen nun 4-mal so viel, also 3x4 = 12 von der Sorte „Sechszehntel": 4×3/16 = 12/16.

Übungen

1. Das Ergebnis ist nicht kürzbar (Multiplikator und Zähler sind beide teilerfremd zum Nenner):

a) 2 × 2/5 b) 3 × 2/7 c) 2 × 2/9 d) 2 × 4/25 e) 3 × 5/16

2. Das Ergebnis ist kürzbar

a) 3 × 2/9 b) 2 × 5/12 c) 4 × 3/16 d) 5 × 2/25 e) 3 × 4/15

3. Das Ergebnis enthält Ganze (mit oder ohne Kürzen)

a) 3 × 5/12 b) 4 × 2/5 c) 6 × 2/3 d) 5 × 3/10 d) 5 × 3/12

Der Lehrer sollte damit rechnen (und sich auch darüber freuen), dass findige Schüler bei der Aufgabe 5 × 3/12 darauf kommen, bereits vor dem Rechnen aus den drei Zwölfteln das bequemer zu behandelnde eine Viertel zu machen:

$5 \times 3/12 = 5 \times \frac{1}{4} = 5/4 = 1\frac{1}{4}$

4. Jana weiß, dass sie für die gleiche Strecke zu Fuß dreimal länger braucht, als wenn sie diese mit dem Fahrrad fährt. Für eine Fahrt mit dem Fahrrad zu ihren Großeltern braucht sie eine dreiviertel Stunde. Wie lange bräuchte sie dafür zu Fuß?

---

[49] Eine gereimte Version könnte heißen: "Bruch mal ganze Zahl – du nimmst nur den Zähler mal!"

5. In die kleine Gießkanne für das Blumenbrett passen 3/8 Liter hinein. Robin gießt alle Zimmerblumen im ganzen Haus und muss dazu die Kanne sechsmal füllen. Wie viel Liter Wasser hat er zum Gießen gebraucht?

Multiplizieren von gemischten Zahlen

Die gemischten Zahlen hatten wir eingeführt unter dem Gesichtspunkt, dass damit Ergebnisse beim Bruchrechnen leichter in ihrer Größe erfassbar sind. Bereits bei Addition und Subtraktion wurde darauf hingewiesen, dass wir das Rechnen mit ihnen möglichst umgehen. Will man dennoch mit ihnen Multiplikationen durchführen, dann ist das allenfalls mündlich im Rahmen des Kopfrechnens möglich, sofern die gewählten Beispiele noch an den Alltagsgebrauch anschließen. Schriftlich ist der Rechengang ohne Klammerschreibweise nicht mehr darstellbar. Dieses Vorgehen können wir getrost der Algebra überlassen, die uns in Klasse 7 die dazu nötigen Methoden und Schreibweisen bereit stellt.

Eine gemischte Zahl ist eine *Summe* aus ganzer Zahl und echtem Bruch. Wenn eine Summe komplett multipliziert werden soll, so muss diese durch eine Klammer geschützt werden; anderenfalls wirkt die Multiplikation nur auf denjenigen Summanden, der unmittelbar neben dem Malzeichen steht. Auf Alltagsbeispiele lässt sich dieser mathematisch diffizile Sonderfall mit geschickter Sprechweise noch ohne ausführliche Begründung anwenden:

$2 \times 1\frac{1}{2} = 3$

wird gesprochen als: „zweimal eineinhalb[50] gibt drei“ oder noch besser: „ein(und)einhalb werden zweimal genommen und wir erhalten 3“. Der Multiplikand wird also von 1 *und* ½ gemeinsam gebildet; das betonte „und“ soll den (absolut unüblichen) Vorrang der Summe von 1 + ½ gegenüber dem Malnehmen sicherstellen[51]. Die korrekte Schreibweise dafür heißt ab Klasse 7:

$2 \times (1 + \frac{1}{2}) = 2 \times 1 + 2 \times \frac{1}{2} = 2 + 1 = 3$

Der malgenommene Bruchanteil bewirkt häufig einen Übertrag auf die ganzen Anteile:

$5 \times 3\frac{1}{4} = 5 \times 3 + 5 \times \frac{1}{4} = 15 + 5/4 = 15 + 1\frac{1}{4} = 16\frac{1}{4}$

Wenn man also auf diese Besonderheit überhaupt eingehen will (was nicht nötig ist), beschränkt man sich auf gut vertraute Zahlen, für welche die Kinder sichere Größenvorstellungen haben. Dann können sie aus einem gesunden Abwägen auf das Ergebnis schließen und entwickeln eine Empfindung für diesen Vorgang. Das genügt vollkommen, weil wir beim Bruchrechnen die gemischten Zahlen durch unechte Brüche ersetzen; beim Sachrechnen werden wir an ihrer Stelle die Dezimalschreibweise benutzen.

Mögliche Beispiele sind gemischte Zahlen mit ½ oder anderen einfachen Stammbrüchen; schon das ¾ im letzten Beispiel birgt beim Malnehmen schwer überschaubare Überträge und damit eine Erschwernis in sich:

$2 \times 2\frac{1}{2}$ $2 \times 5\frac{1}{2}$ $4 \times 3\frac{1}{2}$ $5 \times 1\frac{1}{2}$ $4 \times 1\frac{1}{4}$ $3 \times 2\frac{1}{4}$ $2 \times 1\frac{3}{4}$

Multiplizieren mit Brüchen

Für die Multiplikation mit Brüchen könnte das Kommutativgesetz (Vertauschungsgesetz) der Multiplikation auf Bruchzahlen übertragen werden. Dies ist zunächst nicht selbstverständlich und könnte auch nur aus solchen Fällen hergeleitet werden, in denen die

[50] Für „eineinhalb“ ist umgangssprachlich auch das Wort „anderthalb“ üblich.

[51] Durch geeignete Schilderung (dass sich hier das Malnehmen auf beide Anteile auswirkt) soll der Vorrang der Multiplikation bei gemischten Rechenarten („Punkt vor Strich“) unbestritten bleiben. Wir werden daher auch die Schreibweise: 2 x 1 + ½ in obigem Zusammenhang tunlichst vermeiden, sie aber als Gegenbeispiel gegen nachlässige Sprech- und Schreibweise im Hintergrund haben: 2 x 1 + ½ = 2 + ½ = 2 ½ und sie deutlich unterscheiden von dem hier gemeinten: 2 x 1½ = 3

Anwendung sinnvoll erscheint. Aber aus der Konstanz des Produktes trotz getauschter Faktoren wäre dann zu folgern, dass es egal ist, ob der Multiplikator (bei uns als 1.Zahl links geschrieben) oder der Multiplikand ein Bruch ist.

Aus der Vertauschbarkeit von $2 \times 3 = 3 \times 2 = 6$ würde man also schließen, dass die Vertauschung $½ \times 3 = 3 \times ½$ ebenfalls ohne Einfluss auf das Ergebnis (3/2 oder 1 ½) ist.

Möglicherweise ist für die Kinder diese Vertauschbarkeit befremdlich, weil der Multiplikator eine Tätigkeit repräsentiert und der Multiplikand eine Größe oder gar Sache. Wenn man den realen Inhalt der beiden Aussagen „½ × 3" und „3 × ½" anschaut, fallen die beiden unterschiedlichen Ansätze deutlich auf:

Bei ½ × 3 soll man die Hälfte nehmen von 3 Ganzen
(wobei viele Kinder direkt auf 1 ½ schließen werden);

bei 3 × ½ soll man 3 Stücke der Größe ½ zu einem Ergebnis zusammen fassen
(wobei Kinder in der Regel mit 3/2 antworten werden).

Am Anfang steht also die *Unterschiedlichkeit*[52] der beiden Ansätze. Danach kann beim Vergleich von Aufgaben mit getauschten Faktoren die Gleichheit des Produktes (als Kommutativgesetz für Brüche) entdeckt werden – jedenfalls bei reinen Zahlen ohne Maß- oder Sachbezug. Einige sinnfällige Beispielen zeigen aber auch, dass der Tausch der beiden Faktoren nicht immer realitätsnah ist. Die Aufgabe

„½ × 7 Nüsse" bedeutet zunächst: „nimm die Hälfte von 7 Nüssen".

Die Halbierung von 7 Nüssen zu 3 ½ Nüssen wird bereits möglich, wenn nur eine einzige geknackt werden muss, während

„7 × ½ Nüsse" bedeuten würde, dass alle 7 Nüsse erst geknackt werden, und anschließend trägt jede halbierte Nuss ihren Anteil zu 7/2 Nüsse bei.

Das gewählte Beispiel macht die Unterschiedlichkeit im realen Leben deutlich, vor allem für die Empfindung der Kinder: Die erste Version ist für den Verteiler bequemer und die 3 ½ Nüsse als Ergebnis sind weitgehend besser haltbar; dagegen ist die zweite Version vor allem bei unterschiedlichen Nüssen die gerechtere und dazu für den Empfänger bequemer, weil zum sofortigen Verzehr geeignet!

Die eben geschilderten unterschiedlichen Sichtweisen legen also eine gesonderte Einführung des Malnehmens mit einem Bruch nahe. Doch auch mathematisch gesehen führt uns die Multiplikation mit einem Bruch darüber hinaus auch zu neuen Begriffen: Wir lernen Brüche als *Bearbeiter* (*Operatoren*) von Zahlen kennen. Daher lohnt es sich also auf jeden Fall, die beiden Interpretationen der Multiplikation gesondert einzuführen.

Vorstufe der Multiplikation: Welcher Teil des Ganzen?

Schon vor der Einführung der Brüche kennen die Schüler Begriffe, mit denen Teile eines Ganzen beschrieben werden. Mindestens Formulierungen wie: *Die Hälfte von 12 ist 6,* sind vor der 4. Klasse vertraute Aufgabenstellungen, weil das *Teilen durch 2* auch im alltäglichen Sprechen als *halbieren* bekannt ist. In der ersten Mathematik-Epoche der 4. Klasse dehnten wir diese Sprechweise aus auf das „Vierteln" mit Aufgaben der Art:

Wie groß ist der vierte Teil von 12? Oder: Wie groß ist ein Viertel von 12?

Dieser Sprachgebrauch kann auf alle Bruchteile ausgedehnt werden:

Nimm ein Sechstel von 48! *1/6 von 48 ist 7*.

Die Beziehung „Teil von"

Beim Übergang zur schriftlichen Darstellung vollzieht sich ein gewichtiger Schritt, der Aufmerksamkeit verdient:

[52] Weitere Ausführungen dazu siehe Abschnitt „Division durch Brüche" in Kl.5

Die Aussage „*ein Viertel von 12*“ (geschrieben als: „1/4 v. 12“) bedeutet, dass auf die vorgegebene 12 (als passiver Multiplikand) die *Tätigkeit „Viertel bilden“* einwirkt.

Für diesen Vorgang werden die Kinder gewohnheitsmäßig die alte Sprechweise *den vierten Teil nehmen* oder *an vier verteilen* bevorzugen und daher den Vorgang als Division auffassen. Und genau damit begründen wir, dass bei der Aktion „1/4 von“ dem Nenner die Rolle eines Aufteilers oder Divisors zukommt. Dennoch benutzen wir gezielt die neue Formulierung und dehnen sie auf Vielfache aus:

Mehrere Kinder bekommen mehrere Anteile: Fünf Geschwister, 2 Mädchen und 3 Buben, bekommen von ihrer Oma 30 Mark. Wie viel bekommen die Mädchen, wie viel die Buben?

Wir können rechnen lassen:

1/5 von 30 ist 6; 2/5 von 30 sind dann doppelt so groß, also 12 für die beiden Mädchen;

3/5 von 30 sind dreimal so groß, also 18 für die beiden Buben.

Mit dieser Weiterführung ergibt sich also die Rolle des Zählers als Multiplikator von alleine und wir können damit fürs Kopfrechnen ganze Reihen durchlaufen:

¼ v. 12 ist 3 2/4 von 12 sind dann 2-mal mehr, also 6

Damit können wir die gesamte Multiplikationsreihe der Teile bis zum Ganzen zurückverfolgen:

¼ v.12 ist 3 2/4 v.12 sind 6 ¾ v.12 sind 9 4/4 v.12 sind 12

Für eine solche Aufgabenstellung sind alle Zahlen aus den Einmaleins-Reihen geeignet. Durch die Frage wird das Produkt – etwa $7 \cdot 9 = 63$ – rückwärts aufgeteilt und danach die zugehörige Reihe durchlaufen:

1/7 v.63 ist 9 ; 2/7 v.63 sind 18 ...

Das sind die Sechstel von 30: 1/6 v. 30 ist 5; 2/6 v. 30 sind 10; ...

Die Achtel von 32 sind nacheinander: 1/8 v. 32 ist 4; 2/8 v. 32 sind 8 ...

Im Rahmen des täglichen Kopfrechnens wiederholen wir den Umgang mit solchen Fragestellungen und befestigen ihn durch Aufgaben-Reihen anhand der eingangs angebotenen Wiederholungsaufgaben. Diese Aufgabenarten eignen sich überhaupt gut dafür, den Zahlenraum mit Rhythmen zu strukturieren und zu ordnen; sie unterstützen die Kinder auf dem Weg zu wiedererkennbaren Zahlenbeziehungen und -ordnungen.

Wenn man Brüche wie eben eingeführt als *Bearbeiter* auffasst, gewöhnen sich die Kinder an die multiplizierende Rolle des Zählers und die dividierende des Nenners, vor allem, wenn sie die Rollen der Bearbeiter selbst übernehmen dürfen. Geschickte Kinder (oder Schülergruppen) können jeweils eine solche Tätigkeit (= Operation) übernehmen und damit Zahlen bearbeiten. Bei der Aufgabe „¾ v.20“ geht die 20 zum „Viertler“, dieser sagt „¼ v.20 ist 5“ und schickt die 5 an den „Verdreifacher“, der aus dem einem Viertel die nötigen drei produziert mit der Antwort „¾ v.20 sind 15“[53].

Weitere Übungen können auch daraus bestehen, dass immer nach einem gleichbleibenden Anteil gefragt wird, während das zu behandelnde Ganze sich verändert, also eine geeignete Reihe durchläuft:

¾ von 20 sind 15; ¾ von 40 sind ? ; ¾ von 60 sind ?..;

[53] Mit etwas Pfiff lässt sich solch ein Rollen-Spiel auch bühnenwirksam einrichten. Die zu behandelnden Zahlen können durch die Kinderzahl einer Gruppe dargestellt werden. Die Gruppe geht in das „mal zwei“-Haus (Kulisse oder verdeckende Kinderschar mit Plakat) und kommen als doppelt so große Gruppe wieder zum Vorschein oder ein Raubritter nimmt sich Wegezoll und lässt nur den „dritten Teil“ durch. Die Zahlen können auch als Gegenstände (Säcke auf dem Rücken, Punkte auf einem Schild, usw.) verbildlicht werden, durch die „geteilt durch 2“-Mühle geschickt werden, o.ä. – je überraschender die Verbildlichung und die Zahlenverwandlung erfolgt, desto wirksamer!

Besonders bildhaft wird dieses Vorgehen, wenn die gewählte Zahl sogar ein wirkliches Ganzes darstellt. Dafür eignen sich alle nicht-dezimalen Einheiten, wie sie früher in verschiedenen Lebensbereichen häufig benutzt wurden. Die Zahl 12 war aufgrund ihrer guten Teilbarkeit deutlich bevorzugt. So ist das Dutzend (= 12) noch heute eine geläufige Größe; die Kleinpackung Eier enthält ½ Dutzend, also 6 Stück. Auf dem Markt wurden Eier in Dutzend oder gleich in Schock verkauft. Das Schock waren 5 Dutzend, also 60 Stück. Handelsübliche Packungen von Kleinteilen wie Reißzwecken oder Stecknadeln enthielten ein Groß, das waren 12 Dutzend, also 144 Stück[54]. Die Zwölfteilung der Uhr bietet eine sichtbare Bruchteilung an und die Stunde mit ihren 60 Minuten stellt ein bestens vertrautes Bild dar; das Zeitmaß 24 Stunden für den vollen Tag ist dazu eine gute Ergänzung.

Eine besondere Herausforderung stellt die Frage nach dem Bruch dar, welcher den Anteil am Ganzen benennen kann. Dafür ist ein geschärfter Blick für die multiplikativen Bausteine einer Zahl nötig, was nur mit sicher gelernten und daher frei verfügbaren Einmaleins-Reihen möglich ist. Der Einstieg wird erleichtert, wenn man zunächst Zahlenpaare bevorzugt, die einen Primfaktor gemeinsam haben:

$10 = 2 \times 5$; $15 = 3 \times 5$;

Bei der Frage: „10 = ? von 15“ müssen die Kinder zunächst bemerken, dass die beiden Zahlen der 5er-Reihe angehören. Dann führt die Idee „5 ist 1/3 von 15; 10 ist davon das Doppelte, also 2/3“ auf die Lösung: 10 = 2/3 von 15. Dabei kann man auch auf die bereits mehrfach verwendeten Zahlenrhythmen zurückgreifen: Die 5er-Reihe ist gibt den Zusammenklang-Rhythmus der beiden genannten Zahlen an; 10 ist der zweite Schritt darin und 15 der dritte.

Mit diesen Aufgaben hat man bereits Zahlenverhältnisse im Blick und vermutlich auch die Leistungsgrenzen der Schüler erreicht. Ein systematisches Vorgehen ist hier nicht nötig, durch Probieren oder auch Raten dürfen die Schüler die Lösungen eher gefühlsmäßig entdecken im Sinne eines Zahlenturnens. Entsprechend begabte Schüler oder geschickte Rechner können mit dieser Aufgabenform aber interessante Sonderaufgaben in allen Schwierigkeitsgraden bekommen.

Auch eignen sich solche Fragen nach Bruch-Anteilen zu wiederholenden Übungen auch noch im Kopfrechnen der Folgeklassen, um die vielfältigen Beziehungen zwischen den Zahlen wieder ins Bewusstsein der Schüler zu holen. Für die künftige Dreisatz- und Prozentrechnung wird damit ein fruchtbarer Boden bereitet.[55]

Multiplikation mit einem Bruch

Schon bei den einfachen Aufgaben der Art „1/2 von 12“ und „ ¾ von 60“ oder „4/7 von 35“ haben wir bereits Multiplikationen mit Brüchen durchgeführt. Zur Legitimation des Malpunktes für diesen Vorgang mag folgende Aufgabe ein mögliches Bild sein:

> Tobias und sein Vater wollen einen Nusskuchen backen. Im Rezept steht, dass dazu 100 Gramm Nüsse gebraucht werden. Tobias löffelt die Nüsse mit dem Esslöffel in die Waagschale und passt dabei genau auf. Merkwürdig: Er kann den Löffel aufhäufen, wie

[54] Schock und Groß sind heute keine gängigen Größen mehr, noch weniger Mandel (=15). Wenn im Rahmen der Handwerker-Epoche und des Sachrechnens in der 3. Klasse diese Größen besprochen wurden, ist dies auch jetzt sinnvoll. Ansonsten sind die Größen (und damit die betreffenden Übungen) verzichtbar, lediglich ihre Bildhaftigkeit und Zahlenschönheit sind ein lohnenswerter Reiz.

[55] Die Beziehung 10 = 2/3 von 15 lässt sich deuten als a) Dreisatz: Wie viel kosten 2 Packungen, wenn für 3 insgesamt 15 Euro bezahlt wurden? (Lösung: 2/3 von 15€, also 10 Euro) oder b) Proportionsvergleich: In welchem Verhältnis stehen die Zahlen 10 und 15? (Lösung: 10 zu 15 wie 2 zu 3). Des Weiteren enthalten diese Aufgaben die Verfahren Kürzen und Erweitern in verkleideter Form. Der Anteil, den 10 an 15 hat, lässt sich mit dem Bruch 10/15 beschreiben und durch Kürzen mit 5 auf 2/3 bringen; dieser Bruch stellt keine Größe dar, sondern eine Beziehung zwischen zwei Zahlen (Verhältnis) – eine Betrachtungsweise, die erst in Klasse 5 oder 6 möglich wird.

er will; wenn er ihn leicht schüttelt, bleiben fast immer 12 Nüsse darauf liegen. Als er den dritten Löffel auf die Waage geleert hat, zeigt diese 50 Gramm an. „Noch 3 Löffel, dann bin ich fertig!“ ruft Tobias. „Geschafft! Sechsmal habe ich geschaufelt. Das sind 6 × 12 Nüsse! Es sind ja noch so viele übrig. Darf ich davon naschen? Wie viel Mal darf ich mir den Löffel füllen?“ „Du darfst ihn dir 2½ mal füllen, wenn du mir vorher sagen kannst, wie viele Nüsse das wären!“ Nun könnt ihr euch denken, wie schnell Tobias das heraus bekommen hatte:

zweimal ganz gefüllt 2 × 12 = 24

ein halbmal gefüllt ½ × 12 = 6

zweieinhalbmal gefüllt macht zusammen 2½ × 12 = 30

Wie viele wären es gewesen, wenn Tobias den Löffel nur zu ¾ hätte füllen dürfen?

¾ von 12 = 9 oder mit der neuen Schreibweise: ¾ × 12 = 9

Wir haben bisher erst den Anteil bestimmt und danach mit der Anzahl der Teile malgenommen, doch können wir genauso gut zuerst malnehmen und danach aufteilen:

2/3 × 12 = ?

Wir nehmen erst den Teil: 1/3 von 12 ist 4; dann mal zwei: 2 × 4 sind 8

Oder erst mal zwei: 2 × 12 = 24; dann den Teil: 24 Drittel sind 8 Ganze

In beiden Fällen sehen wir: Beim Malnehmen mit einem Bruch wirkt der Zähler wie ein Multiplikator, der Nenner wie ein Divisor. Als Schreibweise für den Rechengang empfiehlt sich:

$^2/_3 \times 12 = {}^{2\times 12}/_3 = {}^{24}/_3 = 8$

Dabei verzichten wir zunächst noch auf das vorzeitige Kürzen. Der Weg bleibt auch dann derselbe, wenn der Multiplikand nicht geteilt werden kann:

$^2/_3 \times 11 = {}^{2\times 11}/_3 = {}^{22}/_3 = 7\,^1/_3$

Zudem erinnert uns diese Darstellung an das schon gelernte Malnehmen von Brüchen:

$11 \times {}^2/_3 = {}^{11\times 2}/_3 = {}^{22}/_3 = 7\,^1/_3$

Wenn wir also mit reinen Zahlen oder Brüchen (ohne Maße oder Namen von Dingen) rechnen, dürfen wir die Reihenfolge vertauschen. Für das Ergebnis ist es daher egal, wer die Rolle des tätigen Multiplikators spielt und wer den Multiplikanden übernimmt[56]. Die damalige Regel *„Bruch mal ganze Zahl – du nimmst nur den Zähler mal“* gilt immer noch, auch wenn jetzt die Reihenfolge vertauscht worden ist.

Übungen

1. Mit ganzzahligem Ergebnis

a) 3/5 × 30 = ? b) 5/8 × 56 = ? c) 4/7 × 21 d) 2/9 × 54

2. Ergebnis teilweise kürzbar

a) 3/8 × 20 b) 7/16 × 4 c) 5/6 × 9 d) ¾ × 14

3. Ergebnis nicht kürzbar

a) 3/7 × 8 b) 2/5 × 12 c) 4/9 × 2 d) 3/8 × 5 e) 7/10 × 3

4. Vermischte Übungen

a) 4/5 × 15 b) 4/9 × 12 c) 5/12 × 4 d) ¾ × 3 e) 2/9 × 3

f) 7/12 × 2 g) 2/7 × 4 h) 6/5 × 3 i) 5/20 × 4

5.

a) 5 = ? von 10 (Lösung: 1/2); b) 8 = ? von 24 ; c) 5= ? von 25 ; d) 10 = ? von 25

[56] Multiplikator und Multiplikand werden dann nicht mehr unterschieden; das Produkt (=Ergebnis der Multiplikation) wird von den beiden gleichberechtigt als Faktoren (=Macher) erzeugt.

e) 15 = ? von 25 (= 3/5); f) 7 = ? von 35 g) 21 = ? von 35 (= 3/5) ; f) 10 = ? von 18 (= 5/9)

6. 1 Dutzend sind 12 Stück. Wie viel Stück sind a) ½ Dutzend; b) 1/3 Dutzend; c) ¼ Dutzend; d) 1/6 Dutzend; e) 1/12 Dutzend?

7. Wie viel sind a) 2/3 Dutzend; b) ¾ Dutzend; c) 5/6 Dutzend?

8. Wie viel sind a) 1/3 von 2 Dutzend; b) ¼ von 2 Dutzend; c) 1/9 von 3 Dutzend?

9) 1 Schock sind 60 Stück.

Wieviel Stück enthält a) ½ Schock; b) ¼ ; c) ¾ ; d) $^1/_3$; e) $^1/_5$ Schock?

10. 1 Groß sind 144 Stück.

Wieviel Stück enthält a) ½ Groß; b) ¼ ; c) ¾ ; d) $^1/_3$; e) $^1/_6$; f) $^1/_{12}$ Groß?

11. Welchen Anteil nimmt ein Dutzend von einem Groß?

12. Welchen Anteil nimmt ein Schock von einem Groß?

13. Wie viele Minuten haben ½ Stunde; ¼ ; ¾ ; $^1/_3$; $^1/_{10}$; $^1/_{12}$; 1½ Stunden?

14. Für einen vollen Umlauf braucht der Stundenzeiger 12 Stunden.

Wie viele Stunden braucht er für a) ½ Umlauf ; b) ¼ ; c) 1/3 ; d) 2/3 ; e) ¾ Umlauf?

15. Ein ganzer Tag (mit Nacht) dauert 24 Stunden.

Wie viele Stunden hat a) ½ Tag ; b) ¼ ; c) 1/3 ; d) 2/3 ; e) ¾ ; f) 1/6 ; 1/8 Tag ?

16. Die Sommerferien dauern insgesamt 45 Tage; 2/3 davon darf Christian bei seinem Onkel auf dem Bauernhof bleiben. Wie viel Tage sind dies?

Rückblick – Vorblick: Gemeinsam am Ende Kl. 4 nach Dezimal? Mit den Themen: Division auf Kl5 aufgeschoben / erreichbarer Schwierigkeitsgrad, nötige Sicherheit, etc

Dezimalbrüche

In der ersten Epoche der 4. Klasse wurden die Dezimalbrüche aus dem alltäglichen Gebrauch übernommen und so als sinnvolle Konvention eingeführt. Wichtige Schritte dabei waren die ordnende Stellung des Kommas und die richtige Benennung der Stellen davor wie dahinter; dies ließ sich bei der spaltenweise Addition und Subtraktion als Bild überzeugend darstellen. In der zweiten Epoche können nun Multiplikation und Division auf Dezimalzahlen angewandt werden.

Im Rahmen der Darstellungen für die dritte Klasse[57] wurde die Wechselstube eingeführt. Sie verhalf den Kindern, die Stellenschreibweise in ein schriftliches Schema für den Rechengang zu übertragen. Relativ einfach und daher für die Kinder schlüssig gelang dies bei der Addition und danach sogar für die Multiplikation. Erleichternd war vor allem, dass man mit der eigentlichen Rechnung unbekümmert beginnen durfte, um danach zu groß geratene Werte mit einem Stellenübertrag einzuwechseln. Bei

$$45 + 28$$

ergaben die Einer als Zwischensumme 13, davon wurden 10 Einer in der Wechselstube zu 1 Zehner getauscht und als Übertrag ins Zehnerfach gelegt. Ähnlich einfach erfolgte der Übertrag bei der Multiplikation von

$$28 \cdot 8$$

mit den 6 Zehnern aus dem Produkt 64 der Einer.

Dagegen musste bei der Subtraktion vorausschauend der Bedarf für einen Wechsel erkannt und bereits vor der Rechnung durchgeführt werden, um diese überhaupt zu ermöglichen. Die Subtraktion:

57 Ernst Schuberth: xxx 3. Klasse

45 – 28

benötigt als Vorbereitung die Entnahme eines Zehners (von den vorhandenen 4) und dessen Wechsel in Einer (dann 10 + 5 Einer), damit ausreichend viele davon bereitstehen; erst dann können die 8 Einer davon weggenommen werden.

Die Division erfordert einen völlig neuen Ansatz, beginnend mit der größten Stelle. Selbst bei einem 1-stelligen Divisor können schon Schwierigkeiten entstehen, vor allem wenn die Einmaleins-Reihen nicht frei und sicher verfügbar sind. Denn bevor man die eigentliche Rechnung beginnen kann, müssen die Vielfachen des Divisors mit der ersten Stelle (oder gar mehr Stellen) des Dividenden abgestimmt werden. Nur das größte noch hineinpassende Vielfache liefert die richtige Zahl als Startpunkt für die Division. Die für jeden weiteren Schritt nötige Subtraktion empfinden die Kinder als zusätzliche Erschwernis. Das schriftliche Divisionsverfahren hält in Klasse 4 und 5 noch manch steile Stufe bereit.

Eine solche Rückbesinnung kann dem Lehrer vergegenwärtigen, wie vielfältig und unterschiedlich die Hürden auf dem Weg zur Rechenfertigkeit für die Kinder sein können. Eine reine Wiederholung der bisher praktizierten Rechenverfahren ist sicher nützlich, für versierte Rechner in der Klasse aber auch rasch langweilig. Der Vorglanz des Neuen kann aber das wieder aufgegriffene Alte überraschend anders beleuchten, Wiederholung wird damit interessant und wertvoll. Darüber hinaus ermöglicht sie aber auch Festigung durch Wiedererkennen bis hin zur Verwandlung *von der Kenntnis zur Fertigkeit*. Selbst die gut vertraute Addition kann beim Üben mit den neuen Dezimalzahlen weitere Aspekte gewinnen, vor allem aber den Kindern das Gefühl vermitteln, dass sie diese Rechnungsart nicht nur *kennen*, sondern auch *sicher können*.

Addition und Subtraktion von Dezimalzahlen

Zweckmäßigerweise erinnern wir an den Rechenweg mit unseren vereinfachten Sprech- und Schreibweisen zur schriftlichen Addition und Subtraktion. Die spaltenweise Anordnung im Rechenschema wird nochmals mit den Stellenbezeichnungen benannt und nach rechts hinter dem Komma auf die Dezimalbruchteile fortgesetzt. Das Komma ordnet dann alle Zahlen stellenrichtig ein. Dann können wir die Dezimalzahlen zur Wiederholung bei beiden Rechnungsarten benutzen, seien es reine Zahlen oder solche mit Maßen bzw. Benennungen in Verbindung mit Sachaufgaben. Dabei ist nach einigen Additions-Aufgaben vor allem die Subtraktion mit vermehrter Übung abzusichern.

Weil fehlerhafte Lösungen oft nicht aus echten Rechenfehlern herrühren, sondern von Formfehlern in der Spaltenschreibweise, ist ein kariertes Rechenheft als Ordnungshilfe eine gute Stütze. Zu empfehlen ist in der 4. Klasse noch das etwas größere 7mm-Karo, welches ausreichend Platz lässt für deutlich geschriebene Ziffern. Mit einem kleinen 20cm-Lineal lassen sich gerade Linien ziehen für die Kommaspalte und den Unterstrich.

Das Rechnen hat außer seiner inneren Wahrhaftigkeit auch eine ästhetische Seite, in der sich die klare Ordnung äußern kann und damit sichtbar wird. Die Befriedigung über die erfolgreiche Lösung einer Rechnung hängt daher nicht nur am richtigen Ergebnis, sondern auch an einer schönen und ansprechenden schriftlichen Darstellung der Aufgabe. Darüber hinaus ist die übersichtliche Form auch stets ein gewisser Schutz vor Flüchtigkeit und weiteren Fehlerquellen.

Aufgaben zur Addition

1) Diese Zahlen kannst Du leicht im Kopf addieren, wenn Du dabei genau auf die Stellen achtest (ergänze sie notfalls passend): a) 3300 + 44 b) 2210 + 12 c) 45 + 0,6 d) 45 + 1,6 e) 2,50 + 0,16 f) 330,30 + 3,03 g) 215 + 5,022 h) 512,345 + 43,210

addiere erst im Kopf und prüfe dann schriftlich nach: i) 0,610 + 0,056 j) 3,404 + 1,04

2) Schreibe die Zahlen stellenrichtig untereinander und addiere sie:

a) 79,25 + 9,63 b) 24 + 11,5 + 0,14 + 12,137

c) 0,025 + 12,7 + 33 + 7521,041 + 211,0117

Aufgaben zur Subtraktion

3) Diese Zahlen kannst Du im Kopf subtrahieren; achte dabei genau auf die Stellen:

a) 234 – 123 b) 900 – 12 c) 1 – 0,5 d) 25,3 – 3,1 e) 8,5 – 5,8 f) 2 – 0,01 g) 2,2 – 0,18

4) Schreibe die Zahlen stellenrichtig untereinander und subtrahiere sie:

a) 35,6 – 2,3 b) 120 – 8,9 c) 4,71 – 1,38 d) 90,5 – 1,62 e) 42,21 – 1,806 f) 12,4 – 0,055 g) 644,063 – 7,7 h) 643,533 – 138.483 i) 2061,227 – 826,66

Textaufgaben mit Addition und Subtraktion

5) Die mittelalterliche Reichstadt war von einer starken Ringmauer geschützt. Die besonders gesicherten Tore wurden nachts geschlossen und auf der Mauerkrone machten die Nachtwächter Anselm und Berthold ihren Kontrollgang von Tor zu Tor. An der Bastei begannen die beiden ihren Rundweg: Anselm zum Metzgerturm (0,37km), weiter zur Herdbrücke (0,184km), dann zum Gänstor (0,520km), über das Zundeltor (0,362km) zum Frauentor (0,24km); Berthold begann seinen Weg anders herum: Erst zum Glöcklertor (0,6km), dann setzte seinen Weg über das Neutor (0,69km) fort und erreichte nach weiteren 0,354km das Frauentor. Dort wollten die beiden sich treffen, wie immer zu einer kurzen Pause im warmen Turmstübchen.

a) Wer von beiden hatte den kürzeren Weg und wie groß ist der Unterschied?

Nach der Pause ging jeder in seiner Richtung auf der Stadtmauer weiter, bis sie an der Bastion wieder einander trafen. Jetzt hatte jeder den ganzen Mauerring begangen, einer links herum und der andere rechts.

b) Wie lang ist die gesamte Stadtmauer?

6) Im Fachmarkt achtet ein Mitarbeiter immer darauf, wieviel Teppichboden von der großen Rolle abgeschnitten wird und notiert die jeweils noch vorhandene Länge.

Von der 25m-Rolle wurden nacheinander verkauft:

a) 6,25m b) 3,5m c) 4,90m d) 5m e) 2,85m

Welche Zahlen stehen jeweils danach auf seiner Liste?

7) Max geht in die 4. Klasse. Er ist zwar nicht der Größte, aber er hat Kraft und packt gerne mit an. Deswegen begleitet er seine Mutter beim Einkauf im Gartenmarkt und hilft ihr beim Einladen. Dabei achtet er darauf, dass die Zuladung für den kleinen Pkw-Anhänger nicht zu viel wird. Er hat in den Fahrzeugpapieren nachgeschaut, dabei fand er „Leergewicht 98,5kg“ und „Maximalgewicht 500kg“.

Beim Einkauf schaut er jedes Mal auf die Gewichtsangaben und addiert sie auf:

6 Betonplatten (insgesamt 173,4kg), 3 Säcke Kies (jeweils 25kg), 4 Randplatten (zusammen 92,44kg). Ein Mitarbeiter im Markt hat alles auf eine Palette (22,385kg) geladen und diese mit dem Stapler auf den Hänger geschoben. Max hat inzwischen nachgerechnet:

a) Mit wieviel kg darf der Hänger beladen werden (Unterschied zwischen Gesamt- und Leergewicht)?

b) Mit wieviel kg hat die soeben geladene Palette den Hänger belastet?

Auf dem Einkaufswagen sind noch die kleineren Dinge für den Garten: 2mal Blumenerde (je 12kg), 2 Sack Rasendünger (je 18kg), 1 Sack Rasenkalk (20,15kg) und 1 Beutel Rasensamen (2,5kg). „Die Säcke mit Blumenerde sind etwas sperrig und schmutzig, die gehören auf den Hänger“, sagt Mutter und Max antwortet: „Ja, die dürfen auch noch drauf, aber die anderen Sachen müssen dann ins Auto!“

c) Hat Max recht? Wie schwer ist der Hänger jetzt geworden?

d) Wieviel kg kommen noch ins Auto?

8) Der Turm des Ulmer Münster ist mit seinen 161,53m Höhe der höchste Kirchturm weltweit; bis auf 143m Höhe kann er bestiegen werden. Der Kölner Dom hat 157,38m Turmhöhe, Besucher können aber nur bis 97,3m aufsteigen.

a) Um wieviel Meter übertrifft das Ulmer Münster den Kölner Dom?

b) Wieviel Meter kann man in Ulm höher steigen als in Köln?

Wie hoch ist die nicht besteigbare Turmspitze

c) in Ulm bzw. d) in Köln?

Multiplikation und Division von Dezimalzahlen

Für den weiteren Fortgang kommt es darauf an, ob in der dritten Klasse die schriftliche Multiplikation und Division schon behandelt wurden und wenn ja, wie ausführlich das möglich war. Auch wurde geraten, die schriftliche Division in die 4. Klasse zu verlegen. Spätestens jetzt ist aber die Zeit gekommen, an dem dies zu bearbeiten ist. Die Grundlagen dazu und die daraus abgeleiteten Rechenregeln finden sich im Kapitel *Die schriftlichen Rechenoperationen* des genannten Bandes zur 3. Klasse. Diese voraussetzend werden sie hier nur erinnernd aufgegriffen und dann auf Dezimalzahlen übertragen. Die Empfindung der Kinder ist noch stark an die Bildhaftigkeit des Mehrfachnehmens und des Verteilens gebunden. Dadurch bleiben in der 4. Klasse der Multiplikator und der Divisor noch ganze Zahlen, und auch diese mit nur 2 Stellen ausreichend groß.

Bei der Multiplikation ist dies so einfach, dass zum vertiefenden Üben des Rechenschemas bereits nach kurzer Wiederholung schon Dezimalzahlen benutzt werden können. Die Division wird mehr Aufwand bereiten, vor allem, wenn das schriftliche Verfahren erst noch eingeführt werden muss. In diesem Fall wird man den Divisor sinnvollerweise noch 1-stellig halten.

Anfängliche Versuche zur Multiplikation und Division von Dezimalzahlen waren mit besonders einfachen Zahlenbeispielen zwar in der ersten Epoche schon möglich, aber durch den damaligen Verzicht auf Überträge noch sehr eingeschränkt. Die dort vorgeschlagenen Aufgabentypen eignen sich nun als Einstieg, zur wiederholenden Übung und in der Folge zum täglichen Kopfrechnen.

Es ist durchaus möglich, beide Rechenarten nebeneinander zu behandeln, auch können sie gemeinsam geübt und stufenweise weiter geführt werden. Dennoch spricht vieles dafür, erst die Multiplikation gut zu festigen und dabei das Einmaleins mündlich zu üben. So kann für die Klasse das Gefühl vermittelt werden, etwas nicht nur zu kennen, sondern damit auch selbständig umgehen zu können. Das Zutrauen in die eigene Fähigkeit darf gerne gestärkt werden, bevor es gilt, die schwierigere Division zu erobern. Unabhängig davon kann zur Ermutigung die reine Stellenverschiebung als besonders einfache Art des Multiplizierens und Dividierens mit den Zahlen 10, 100 und 1000 vorweg genommen werden. Die Freude darüber kann beflügelnd wirken bei manch steinig-steilem Pfad zum angestrebten Rechengipfel.

Besonderheit des Dezimalsystems: Die Stellenverschiebung

Zehnerschritte

Wir erinnern an die aus der 3. Klasse bekannten „Zehnerschritte“. Beim Multiplizieren mit 10 können wir dadurch „nach oben“ wechseln:

10 Hunderter sind 1 Tausender, oder:

1 H × 10 = 10 H = 1 T ; oder 100 × 10 = 1000

Entsprechend sind auch beliebig andere Aufgaben möglich:

3 Z × 10 = 30 Z = 3 H ; oder 30 × 10 = 300

5 E × 10 = 50 E = 5 Z ; oder 5 × 10 = 50

Beim Dividieren durch 10 wechseln wir entsprechend „hinunter“ zur kleineren Einheit:

1 Tausender sind 10 Hunderter; wenn wir diese an 10 verteilen, ergibt sich 1 Hunderter; bei 1T : 10 = ? wechseln wir also erst und teilen dann:

10 H : 10 = 1 H ; oder 1000 : 10 = 100

3 H : 10 = ?   Wechsel und Teilen: 30 Z : 10 = 3 Z oder 300 : 10 = 30

5 Z : 10 = ?   Wechsel und Teilen: 50 E : 10 = 5 E oder 50 : 10 = 5

Nach nur wenigen Aufgaben dieser Art werden die Schüler daraus einen Rechentrick ableiten, um Malnehmen und Teilen abzukürzen. Gemeinsam mit dem Lehrer wird dieser dann formuliert als

Erste Stellenregel:

Mal 10 vergrößert die Zahl um 1 Stelle;

geteilt durch 10 verkleinert sie um 1 Stelle

Wir übertragen sie auf die Multiplikation und Division von zusammengesetzten Zahlen, wobei fehlende Einer mit einer Null gekennzeichnet werden:

T	H	Z	E	
	1	3	5	
				x 10
1	3	5	0	

T	H	Z	E	
1	3	5	0	
				: 10
	1	3	5	

In dasselbe Schema können auch Nachkommastellen eingetragen werden. Damit stellt das Überschreiten des Kommas keine große Hürde mehr dar:

T	H	Z	E	z	h	T	
	1	3	5,	2	4	6	
							x 10
1	3	5	2,	4	6	0	

T	H	Z	E	z	h	t	
1	3	5	2,	4	6	0	
							: 10
	1	3	5,	2	4	6	

Die nicht besetzten Spalten hinter dem Komma (hier bei „t“) füllen wir mit 0 (=Null), was uns bei der noch folgenden Kommaregel entgegen kommen wird. Aus der Rechenzeile

135,246 × 10 = 1352,460   1352,460 : 10 = 135,246

lässt sich unsere erste Stellenregel ausweiten zu einer gut brauchbaren

Zehnerregel:

Mal 10 vergrößert die Zahl um 1 Stelle; wir schieben dazu das Komma um 1 Stelle zurück (nach rechts).

Geteilt durch 10 verkleinert sie um 1 Stelle; wir schieben dazu das Komma um 1 Stelle vor (nach links).

Aufgaben

1) Multipliziere diese Zahlen mit 10:

a) 230   b) 38,24   c) 0,5   d) 1,16 e) 0,02 f) 135,246

2) Dividiere die Zahlen aus 1) durch 10

3) Am Schulhof ist die 12,5m lange Rasenkante durch 10 Randsteine abgegrenzt. Wie lang ist jeder davon?

4) Marc hat mit neun Freunden seinen Geburtstags-Ausflug vor. Am Ziel soll jeder Teilnehmer (auch er selbst) als Belohnung eine Brezel und ein Nusshörnchen erhalten. Wie viel bezahlt er beim Bäcker für seine Brezeln (je 0,78€) und Hörnchen (je 1,65€)?

5) Lena berichtet der Klasse, wie sie alle Aufgaben mit „mal 5“ ganz schnell löst: „Ich muss nur halbieren und dann eine Null anhängen. So geht es bei 12 · 5 = ? Erst die 12 halbieren: 6; Null dran: 60; also ist 12 · 5 = 60!“

Probiere es mit den Zahlen a) 18 b) 22 c) 424 d) 3636

6) Felix wendet ein: „Dieser Rechentrick geht ja nur bei geraden Zahlen! Was machst Du bei 23?“ Doch Lena sagt nur: „Kein Problem, da mache ich es einfach umgekehrt! Erst Null dran: 230; dann halbieren: 115; also ist 23 · 5 = 115.“

Probiere es mit den Zahlen a-d) aus 6) und danach mit e) 45 f) 57 g) 189 h) 733 i) 3249

7) Kannst Du einen einleuchtenden Grund für diesen Trick schildern und ihn damit erklären?

Kommaregel zur Stellenverschiebung

Die uns selbstverständliche Stellenverschiebung bei der Multiplikation und Division in 10er-Schritten konnten die Kinder (mit Anleitung) also durchaus selber entdecken und anschließend darüber strahlen, welch genialen Rechentrick sie gefunden hatten: Malnehmen und Teilen ohne zu rechnen! Vor allem das spätere Sachrechnen lässt sich dadurch viel effektiver und einfacher gestalten, weil die 10er-Schritte sich ohne echten Rechenvorgang auf alle dezimalen Maße übertragen lassen.

Wir können nochmals daran erinnern, wie in unserem dezimales Stellenwert-System Multiplikation und Division in 10er-Schritten stufenweise von Stelle zu Stelle führten:

1 E · 10 = 1 Z; 1 Z · 10 = 1 H usw. ebenso 1 E : 10 = 1 z ; 1 z : 10 = 1 h

oder über mehrere Stellen hinweg:

1 T = 10 H = 100 Z = 1000 E ebenso 1 t = 0,1 h = 0,01 z = 0,001 E

Mit 10 können wir bereits ganz leicht multiplizieren oder dividieren:

1 · 10 = 10 (eine Stelle mehr) ebenso 1 : 10 = 0,1 (eine Stelle weniger)

5 · 10 = 50 (aus 5 E werden 5 Z) ebenso 5 : 10 = 0,5 (aus 5 E werden 5 z)

und genauso leicht mit 100:

1 · 100 = 100 (zweimal eine Stelle mehr) ebenso

1 : 100 = 0,01 (zweimal eine Stelle weniger)

5 · 100 = 500 (aus 5 E werden 5 H) ebenso 5 : 100 = 0,05 (aus 5 E werden 5 h)

10 · 100 = 1000 (zweimal eine Stelle mehr; aus Z werden T) ebenso

0,1:100 =0,001 (zweimal eine Stelle weniger; aus z werden t)

20 · 100 = 2000 (aus 2 Z werden 2 T) ebenso: 0,2 : 100 = 0,002 (aus 2 z werden 2 t)

Hilfreich ist auch der Hinweis, dass alle nicht besetzten Stellen jederzeit mit Nullen gefüllt werden dürfen. Rechts ist dies hinter der letzten Nachkommastelle (bei fehlendem Komma dürfen wir es hinter den Einern setzen). Links stehen diese unsichtbaren Nullen vor der ersten Vorkommastelle, also vor der ersten gültigen Ziffer innerhalb der Zahl (ohne gültige Einer steht links vom Komma die führende Null). Nun schreiben wir diese eigentlich unnötigen Nullen als ausreichenden Vorrat mit und machen dann die Rechenregeln als Bild sichtbar:

20,<u>00</u>0 · 100 = 2000,0 = 2000 ebenso: 00<u>00</u>,2 : 100 = 00,002 = 0,002

Der Unterstrich bereitet die Kommabewegung vor; an der Tafel und im Heft können wir ihn farbig kennzeichnen und mit einer Pfeilspitze in Bewegungsrichtung versehen.

Kommaverschiebung:

Multiplizieren mit 10 (100; 1000) vergrößert die Zahl um 1 (2; 3) Stelle(n); das erreichen wir, wenn wir das Komma um 1 (2; 3) Stelle(n) nach rechts rücken.

Dividieren durch 10 (100; 1000) verkleinert die Zahl um 1 (2; 3) Stelle(n); das erreichen wir, wenn wir das Komma um 1 (2; 3) Stelle(n) nach links rücken.

Aufgaben:

1) Multipliziere alle Zahlen mit 100: a) 23 b) 4,5 c) 0,24 d) 0,0646 e) 42,65 f) 802,54 g) 10,2

2) Multipliziere die Zahlen aus 1) mit 1000

3) Dividiere die Ergebnisse aus 1) durch 10

4) Dividiere die Zahlen aus 1) durch 100

5) Dividiere die Ergebnisse aus 1) durch 1000

6) Klarsichthüllen kosten

a) im 10er-Pack 2,20€; b) im 100er-Pack 19,00€; c) im 1000er-Pack 150€;
Wie teuer ist jeweils 1 Hülle bei den Angeboten a, b, c) ?

7) Schüler der 6. Klasse bereiten einen Hefte-Verkauf vor. Sie bestellen je 100 Hefte von 10 verschiedenen Sorten. Der 100er-Pack kostet jeweils 89,50€.

a) Was kosten die 10 Pakete?

b) Wie groß ist die zu bezahlende Rechnung, wenn der Versand noch 4,50€ extra kostet?

c) Die Hefte werden zum Stückpreis von 1,20€ weiter verkauft. Wie viel würden die 6.Klässler einnehmen, wenn sie alle Hefte verkaufen könnten?

d) Wie groß wäre dann der Gewinn für ihre Klassenkasse?

Die Multiplikation von Dezimalzahlen

Die schriftlichen Rechenschemata ermöglichen uns, den Rechenvorgang aufzugliedern und ihn dann stellenweise innerhalb der einzelnen Spalten der Stellenwerttafel abzuarbeiten. Das überzeugendste Bild dazu lernten wir im Beispiel des Kassenbuchs kennen. Jede Spalte war Stellvertreter für ein Fach in der Kasse. Alle Rechenschritte konnten somit einstellig vorgenommen werden, weil jeder 10er-Übertritt als Umwechseln ins nächste Fach interpretiert wurde. Egal, wie groß die zu addierenden Zahlen waren, die Rechnung war reduzierbar auf das kleine Einundeins.

Mit demselben Prinzip konnte die Multiplikation einer großen Zahl auf die mehrfache Anwendung des kleinen Einmaleins zurückgeführt werden. Wenn wir nun darauf zurückkommen und mit zunächst einstelligen Multiplikatoren beginnen, können wir die Rechnung ziffernweise im Kopf vornehmen und das Ergebnis schrittweise notieren. Dies ist auch möglich, wenn die schriftliche Multiplikation noch gar nicht eingeführt worden ist; in diesem Falle gibt die Stellenwerttafel ein sicheres Geleit.

Mit einigen an der Tafel mitnotierten Beispielen, zunächst ohne, dann mit Übertrag, erinnern wir das Vorgehen oder führen es spätestens jetzt ein; es lässt sich auch sofort auf Dezimalzahlen anwenden. Auf die bereits mehrfach erwähnte Umkehrung in der Schreib- und Sprechweise wird nochmals hingewiesen: Erst wird die zu bearbeitende Zahl (passiver Multiplikand) genannt, dann kommt der Auftrag für den Bearbeiter (aktiver Multiplikator), der also nun rechts steht:

„132 zweimal nehmen“ Tafelnotiz: $132 \cdot 2$

Wir können jedes Zahlenbeispiel auch sofort mit einer Kommasetzung begleiten:

„1,32 zweimal nehmen“ Tafelnotiz: $1,32 \cdot 2$

Vermutlich wird kein Kind die komplette Zahl direkt verdoppeln, sondern alle werden ziffernweise vorgehen. Zwar wäre in diesem Beispiel (weil es ohne Übertrag auskommt) die Arbeitsreihenfolge egal, doch beginnen wir wie bei der Addition immer mit der kleinsten Stelle, gehen also von rechts nach links vor.

Mit weiteren Aufgaben dieser Art gewöhnen sich die Kinder rasch daran, dass Dezimalzahlen genauso zu bearbeiten sind, wie ganze Zahlen. Wenn die Zahl an der Tafel steht, fällt das Kopfrechnen dennoch leichter und lässt auch einfache Überträge zu:

a) 6,32 € · 2 b) 12,24 € · 3 c) 3,12 · 4 d) 1,5 · 2 e) 0,121 · 5 f) 2,02 · 5 g) 4,132 · 6

Was ist das Doppelte von 1,22€? Was ist das Dreifache von 1,18€?

Bald sind mehrere Überträge nötig, wofür wir nochmals die Zehnerübertritte üben. Der Rechenvorgang lässt sich beleben, indem die mündliche Rechnung delegiert wird an kleine Gruppen, die jeweils eine Zahlenstelle als Kassenfach „verwalten", zu ihrem jeweiligen Bestand die Einlage addieren und im Bedarfsfall den Übertrag durch eine „Merkergruppe" weitergeben lassen.

Die Tafelnotiz macht anhand der Stellenwerttafel die Überträge sichtbar und führt als Zwischenschritt zur schriftlichen Darstellung, die Merkzahlen des Übertrages können klein dazu gefügt werden:

T	H	Z	E	
	2	7	3	
				· 8
	(5)	*(2)*		
2	1	8	4	

Z	E	z	h	
	2,	7	3	
				· 8
	(5)	*(2)*		
2	1,	8	4	

Auch wenn die Multiplikation schon eingeführt und geübt war, lassen wir nochmals die Schritte mitsprechen: 3 Einer mal 8 sind 24, wechsle 2 Zehner ein und schreibe 4 Einer, behalte (merke oder notiere) die gewechselten 2 Zehner; 7 Zehner mal 8 sind 56 Zehner und die behaltenen 2 Zehner sind 28 Zehner oder 5 Hunderter und 8 Zehner, schreibe 8 in das Zehnerfach und behalte die 5 Hunderter; 2 Hunderter mal 8 sind 16 Hunderter, gemeinsam mit den behaltenen 5 Hundertern sind es 21 Hunderter, trage 1 Hunderter und 2 Tausender in die Ergebniszeile ein. Parallel daneben kann dieselbe Rechnung mit Kommasetzung durchgeführt werden. Im abgebildeten Beispiel beginnt die Rechnung mit den 3 Hundertsteln und läuft mit nur geänderten Stellennamen genauso ab wie die Rechnung ohne Komma.

Nach einigen weiteren mündlichen Beispielen wird der erste Eindruck bestätigt: Das Komma bleibt an derselben Stelle, wenn man von rechts aus zählt, nach links kann die Zahl deutlich größer werden und auch mehr Stellen bekommen, aber die Nachkommastellen bleiben gleich viel. Selbst bei der Multiplikation 2,125 · 8 = 17,000 = 17 gilt diese Regel noch, wenn wir alle ausgerechneten Ziffern korrekt aufschreiben, obwohl ihre Nullen beim Ergebnis sogar wegfallen dürfen.

Kommaregel:

Wenn wir eine Dezimalzahl mit einer ganzen Zahl multiplizieren, bleiben gleich viele Nachkommastellen.

Es ist nicht nötig, die herleitenden Tafelbeispiele von den Kindern auch ins Heft übertragen zu lassen, die Darstellung ist eher irritierend. Es genügt die Kommaregel als Text und die dann folgenden Rechnungen sind in der klassischen Schreibweise dargestellt, wie sie in der 3. Klasse eingeführt wurde: Rechtsbündig beginnen wir unter dem Multiplikator das Ergebnis zu schreiben, ganz am Schluss setzen wir das Komma, indem wir von rechts die Kommastellen abzählen. Dies können wir anfänglich auch noch mit Unterstrich sichtbar machen, am besten in leicht konkaver Bogenform.

2,	7	3		·	8
			(5)	*(2)*	
		2	1,	8	4

Kindern, die nicht auf die Notiz der Merkzahlen verzichten wollen, bleibt erlaubt, diese auch im Heft klein mitzuschreiben – sinnvollerweise oberhalb der Ergebniszahlen, damit sie später in der mehrzeiligen Multiplikation nicht mit den Überträgen innerhalb der

Schluss-Addition verwechselt werden.

Auf jeden Fall sollte die Klasse Gelegenheit haben, mit etlichen Aufgaben diese einfache Multiplikation zur sicheren Fertigkeit zu verwandeln, bevor wir mit 2-stelligen Zahlen malnehmen.

Aufgaben mit einstelligem Multiplikator

1) a) 565 · 9 b) 24,2 · 8 c) 5005 · 5 d) 0,15 · 4 e) 252,85 · 7 f) 32,155 · 6

2) a) 5 × 21,45€ b) 4 × 10,655 kg c) 6 × 78,30 m d) 8 × 252,85€ e) 7 × 3,6g

3) Tobias möchte sich ein besseres Lineal und Zeichendreieck kaufen. Er hat ein schönes Set entdeckt und schaut vorsichtshalber in seinem Geldbeutel nach. Dort findet er nur 3,45 Euro. „Schade“, sagt er, „ich müsste genau doppelt so viel haben, dann könnte ich es kaufen.“ Wie viel kostet das Set?

4) In England und Amerika wird als kleines Längenmaß das Inch benutzt. Bei uns ist es unter der Bezeichnung „Zoll“ geläufig. Es entspricht 2,54cm.

a) Wie lang sind 8 Zoll?

b) Die Dicke (der Innendurchmesser) von Wasserrohren und Schläuchen wird meist in Zoll angegeben. Wie dick ist ein 2-Zoll-Rohr?

5) In der Seefahrt gibt man Strecken in Seemeilen (sm) an, die man als 1,85km = 1sm umrechnen kann. Die Elbe weitet sich an ihrer Mündung auf 9sm auf. Wie weit ist es hier von Ufer zu Ufer?

Beim Übergang zu 2-stelligen Multiplikatoren beginnen wir mit den „glatten“ Zehner und multiplizieren in zwei Schritten. Heißt der Multiplikator 40, so können wir erst mit 4 malnehmen und danach noch verzehnfachen.

2,	7	3		·	4
			(2)	*(1)*	
		1	0,	9	2

Den ersten Schritt schreiben wir wie gewohnt und behalten beim Ergebnis die bisherigen zwei Nachkommastellen bei.

Beim zweiten Schritt nehmen wir mittels der alten Zehnerregel das Zwischenergebnis noch 10-mal:

10,92 · 10 = 109,20

und schreiben die eigentlich unnötige Endnull mit, damit gleich viele Nachkommastellen bleiben, wie es unsere Kommaregel verlangt. Wir sehen, wie die Ziffern des Multiplikanden um eine Stelle vorgeschoben wurden oder – gleichbedeutend – das Komma innerhalb der alten Ziffern um eine Stelle nach rechts rückte.

2,	7	3		·	4	0
			(2)	*(1)*		
		1	0	9,	2	0

Mit diesem Wissen können wir in einer einzigen Rechenzeile beide Schritte gemeinsam notieren: 4-mal nehmen und 0 anhängen, damit wir 40-mal genommen haben. Die Kommastellen übernehmen wir vom Multiplikanden gemäß der Kommaregel.

2,	7	3		·	4	0	0
			(2)	*(1)*			
		1	0	9	2,	0	0

Auf die gleiche Weise können wir sogar mit 400 oder gar 4000 malnehmen, wenn wir die Endnullen korrekt mitschreiben. Wieder hilft hier ein kariertes Heft bei der korrekten Darstellung: Das Produkt steht (rechtsbündig) spaltenweise genau unter dem Multiplikator.

Im Kopfrechnen bearbeiten wir wiederholend diesen Aufgabentyp mit Zahlen, die als visuelle Stütze an der Tafel notiert sind. Um den neuen Schritt auch in der schriftlichen Darstellung zu festigen, kommen ins Heft einige dieser

Übungen:

Multipliziere die Zahlen 1) 3,42 ; 2) 52,05 ; 3) 135,7 ; 4) 0,454 ; 5) 1,6

nacheinander mit: a) 2; b) 20 c) 200 d) 4 e) 40 f) 400 g) 5 h) 50

Falls die schriftliche Multiplikation nicht schon aus Klasse 3 bekannt war, dürfen die Schüler entsprechende Aufgaben weitere Male im Heft selbständig bearbeiten. Anregungen dazu und Grundlegendes zum dann folgenden Abschnitt finden sich im bereits genannten Band zur 3. Klasse.

Damit die Weiterführung zur zweizeiligen Multiplikation auf sicheren Füßen steht, achten wir auf die sorgfältige Schreibweise mit geordneten Spalten: Das von den Zehnern erzeugte Produkt wird genau unter der Zehnerstelle rechtsbündig begonnen und nach links geschrieben, unter den (leeren) Einer schreiben wir die Endnull des Produkts; am Schluss setzen wir das Komma, indem wir wie früher die dazu nötigen Stellen von rechts aus abzählen.

Für die Weiterarbeit mit echt zweistelligen Multiplikatoren können wir auf die in Klasse 3 erübten Fertigkeiten zurückgreifen. Falls dort noch keine Vorbereitung stattfand, lassen wir uns unbefangen sprachlich helfen. Bei der Rechnung 2,73 · 48 sollen wir den Multiplikanden 2,73 mit 8 und 40 malnehmen und nehmen dies wörtlich:

2,	$\underline{7}$	$\underline{3}$		·	4	8	*(Arbeits-schritte)*
			2	*(5)* 1	*(2)* 8	4	*(mal 8E)*
		(1) 1	*(2)* 0 1	*(1)* 9 1	2	*(0)*	*(mal 4Z)*
		1	3	1,	$\underline{0}$	$\underline{4}$	

Wir nehmen von der ursprünglichen Zahl (wie bisher ohne zunächst auf das Komma zu achten) zum einen das 8-fache und zum anderen das 40-fache; die Endnull dabei ist zwar nicht nötig, kann aber unsicheren Kindern den Weg zur richtigen Spalte erleichtern. Danach fügen wir die beiden Ergebnisse zum „8 und 40“-fachen zusammen durch spaltenweise Addition.

Spätestens jetzt zeigt sich die Bedeutung einer sorgfältigen Darstellung, mit der die Ziffern automatisch genau in die richtige Spalte kommen und für die nachfolgende Addition perfekt vorbereitet sind. Ganz am Schluss setzen wir das Komma, indem wir von rechts die Kommastellen abzählen und notfalls einige Male noch mit Unterstrich kennzeichnen.

2,	$\underline{7}$	$\underline{3}$		·	4	8	*(Arbeits-schritte)*
		(1) 1	*(2)* 0	*(1)* 9	2	*(0)*	*(mal 4Z)*
			2 1	*(5)* 1 1	*(2)* 8	4	*(mal 8E)*
		1	3	1,	$\underline{0}$	$\underline{4}$	

Mit dieser sprachlichen Hinführung arbeiteten wir auch innerhalb des Multiplikators eher zufällig – wie anfangs eingeführt – „wie bei der Addition immer mit der kleinsten Stelle“ beginnend und damit konsequent von rechts nach links vorgehend. Da aber „8 und 40“ von uns als 4Z plus 8E gelesen wird, dürfen wir die Rechnung genauso gut mit den Zehnern, also mit der ersten Stelle des Multiplikators beginnen und von links nach rechts arbeiten. Dies ist auch die üblichere Darstellungsweise. Welche Arbeitsweise künftig bevorzugt wird, entscheidet der Lehrer und bleibt auch dann dabei; er lässt aber die Alternative als gleichwertig gelten.

2,	7	3		·	4	8	1
		1	0	9	2		
			2	1	8	4	
					2	7	3
		1	3	1	3,	1	3

Durch ausreichende Übung werden die Schüler zu einem sicheren Umgang geführt, der auch größere Zahlen erlaubt. Überdies darf auf dem weiteren Weg zur und in der 5. Klasse die schriftliche Darstellung reduziert werden auf das Nötigste: Merkzahlen in den Multiplikationszeilen ebenso bei der Addition, Endnullen und Kommastellen-Unterstrich können dann entfallen, werden aber schwächeren Schülern weiterhin zugebilligt. Bei weiterhin exakt gepflegter Spaltenschreibweise entsteht daraus das typische Bild einer Treppe oder Staffel als Schema für die schriftliche Multiplikation. In Klasse 5 wird die Kommaregel ergänzt, um auch Dezimalbrüche als Multiplikatoren zu ermöglichen.

Aufgaben

1) Bei der Rückkehr vom Klassenausflug benutzen die 34 Schüler den Linienbus, wobei die Einzelkarte 2,65€ kostet. Wie viel kosten die Schülerkarten insgesamt?
2) „Heute 3 Brezeln für nur 1,95€!" steht an der Theke beim Bäcker. Maja weiß, dass sonst 1 Brezel 85 Cent kostet und überlegt, wieviel sie mit dem Angebot sparen würde:
a) Wieviel kosten 3 Brezeln normalerweise?
b) Wieviel spart sie also mit dem Angebot?
3) Die 3. Klasse will im Pausenhof den Unterbau für eine neue Sitzbank mauern. Sie will dafür 4 Ziegel quer hintereinander und 11 Ziegel längs nebeneinander benutzten. Nach der 3. Ziegel-Lage wird die passende Höhe erreicht.

a) Wieviel Ziegel werden insgesamt gebraucht?

b) Weil Loch-Ziegel verwendet werden sollen, sind sie nicht all zu schwer. Dennoch wiegt jeder von ihnen 1,35kg. Nun werden sie gemeinsam auf einer Palette angeliefert. Wie schwer ist die gesamte Ziegelladung?

c) Beim Abladen legt die Klasse alle Ziegel der Länge nach aneinander. Wie lang wird diese einfache Ziegelschlange, wenn jeder Ziegel 0,24m lang ist?

Ergänzende Möglichkeiten

Außer der Stellenwerttafel sind für die Multiplikation auch andere Begründungen naheliegend:

a) Statt des unbemaßten Multiplikanden benutzen wir den Geldbetrag 2,38 Euro, der gewechselt wird in 238 Cent. So kann ohne Komma mit 32 malgenommen werden zum Produkt 7216 Cent. Danach wird in 72,16 Euro zurückgewechselt. Unmittelbar einleuchtend (aber an das spezielle Beispiel zweier Kommastellen gebunden) ist nun, dass die Stellenverschiebung des Multiplikanden sich auf das Produkt überträgt.

b) Weniger anschaulich, aber für alle Dezimalzahlen gültig, ergibt sich dieselbe Aussage, wenn der Multiplikand mit dem Maß seines kleinsten Dezimalbruchteils gemessen wird. In unserem Beispiel ergibt sich: 2,38 = 238 Hundertstel. Nach der Multiplikation mit 32 wird das Produkt 7216 Hundertstel erreicht und wieder als Dezimalzahl umgeschrieben: 7216 Hundertstel = 72,16. Die Stellenzahl hinter dem Komma hat sich durch die gleiche Bezeichnung „Hundertstel" erhalten.

c) Wurde vor den Dezimalbrüchen die Multiplikation von gemeinen Brüchen eingeführt, so kann der Multiplikand in einen Bruch mit Nenner „Hundertstel" erweitert (238/100) und danach malgenommen werden zu 7216/100. Da lediglich der Zähler malgenommen wird, verbleibt der Nenner unverändert; wird er danach zum Dezimalbruch zurückverwandelt, verschiebt sich beim Ergebnis nur das Komma um die entsprechende Stellenzahl (hier: Hundertstel, also das Komma um 2 nach links).

Division von Dezimalzahlen

Ähnlich wie bei der Multiplikation können wir das Vertrauen der Kinder zum neuen Schritt in die Division bestärken, wenn wir überschaubare Alltagsaufgaben vorweg mündlich lösen lassen. Nach einfachsten Aufgaben aus den 1x1-Reihen als Kopfrechenübungen wie 36 : 9 oder 35 : 7 werden die folgenden größeren Zahlen an die Tafel geschrieben. Dadurch können die Kinder die einzelnen Ziffern nacheinander bearbeiten und so unbewusst bereits die Schritte der schriftlichen Division vorwegnehmen. Wichtig ist dabei die geänderte Rechenabfolge: Im Gegensatz zu den anderen drei Grundrechenarten beginnt die Division mit der größten Stelle, wir arbeiten also von links nach rechts! Die Beschränkung auf einstelligen Divisor, keine oder sehr einfache Überträge, sofort aufgehende Aufgaben – also ohne zusätzliche Kommastellen im Ergebnis, ohne Null im Quotienten, 2 Kommastellen aus vertrauten Maßen (m oder €) und die Erinnerung an die Zehnerregel ermöglicht als

Vorübungen

168 : 2 ; 168 : 4 ; 168 : 8 ; 848 : 2 ; 848 : 4 ;

132 : 2 ; 132 : 3 ; 132 : 4 ; 132 : 6 ; 132 : 8 ;

15€ : 10 ; 240€ : 10 ; 240€ : 100 ; 3,20€ : 10 ; 16,50€ : 10 ;

Was ist die Hälfte von 4,84€? Wie groß ist ein Drittel von 6,60m?

24,60€ : 2 ; 24,60€ : 3 ; 24,60€ : 6 ; 24,60€ : 10

1,50m : 3 ; 1,50m : 5 ; 1,50m : 10 ;

4,52 : 2 ; 4,52 : 4 ; 12,66 : 3 ;

Auch Rechenreihen mit teilerfreudigen Zahlen sind gut geeignet. So lässt sich 8,64 teilen durch 2; 3; 4; 6; 8 und kann noch gesteigert werden auf :9 oder :12 (dann besser mit :3 als zweiten Rechenschritt nach :3 bzw. :4).

Die schriftliche Darstellung

Die ausführliche Darstellung, wie das schriftliche Rechenverfahrens eingeführt werden kann, findet sich im Band zur 3.Klasse. Dort blieb jedoch völlig offen, ob dem Lehrer und seiner Klasse dieser Schritt noch im 3. Schuljahr gangbar erscheint oder besser auf das Folgejahr verschoben wird. In letzterem Falle besteht hier die Möglichkeit, mit der schriftlichen Division zu beginnen; realistischerweise können dann die für die Vorübungen genannten Prämissen nicht überschritten werden. Bei der Zeitplanung sollte der Lehrer bedenken, dass für die Anwendung der Dezimalbrüche in Sachaufgaben und bei Maßumwandlungen noch genügend Raum bleibt. Auch sollten die einfachsten der gewöhnlichen Brüche in dezimaler Form erkannt werden. Dies ist wichtiger, als mit zu viel Zeitaufwand das Teilen mit gesteigertem Niveau zu üben.

Die Division wird noch im nachfolgenden 5. und 6. Schuljahr immer wieder aufs Neue zu erüben sein, bis alle Schüler darin Sicherheit gewonnen haben. Unübersichtlich, umständlich und fehleranfällig: So kann den Schülern diese Rechnungsart erscheinen und für viele ist sie es auch tatsächlich so. Denn es darf nicht übersehen werden, dass für die Division alle anderen drei Grundrechenarten gebraucht werden, dazu die 1x1-Reihen parat sein müssen und das auch noch rückwärts von den jeweiligen Produkten her. Wird dann der Divisor gar mehrstellig, so muss man im Voraus verlässlich abschätzen können, welche Ziffer im Ergebnis zu erwarten ist – schlimmer noch: Ohne diese Vorhersage kann mit der eigentlichen Rechnung gar nicht begonnen werden!

Hier soll der Grundgedanke des Verfahrens erinnert werden, damit es auf die Division von Dezimalzahlen ausgedehnt werden kann. Das in der 3. Klasse benutzte Rechengeld mit der dazugehörigen Wechselstube ist gerade für die Division ein besonders geeignetes Bild, um die wiederholende Abfolge der Rechenschritte sicher zu geleiten. Insbesondere kann mit dem Übergang von ganzen Euros auf Centbeträge auch die Kommasetzung einbezogen werden. Die Sortierung des Geldes in Zehnerstufen ist dann eine hilfreiche Illustration für die Stellenwerttafel.

Mit der Bemaßung Euro wird gleichzeitig auf eine „echte Division“ hingewiesen; es liegt also die Operation Dividieren oder *Aufteilen* vor.[58] Der Dividend, also der zu verteilende Vorrat, wird *in gleich große Portionen* aufgeteilt. Der Divisor oder Teiler nennt die Anzahl der zu bildenden Portionen. Das Ergebnis der Division liefert die Größe einer solchen Portion; diese ist von gleicher Art wie der Vorrat, hier sind es also wieder Euro. Wir sollten daher (entgegen sonstiger Rechen-Gewohnheiten) die Frage vermeiden: „Wie oft ist in 24 die 6

[58] Siehe Band 1 und Band 3 dieser Reihe.

enthalten?“ mit der Antwort „4-mal“ und stattdessen wirklich teilen: „Von 24€ verteilt an 6 bekommt jeder 4€.“ Das Wort „verteilen“ schildert bildhaft die Tätigkeit und der Teiler selbst sagt uns, an wie viele Kinder wir austeilen.

Beim Rechnen mit reinen Zahlen, also nach Eroberung der schriftlichen Division, aber spätestens in der 5. Klasse, werden wir diesen strengen Ansatz relativieren und die beiden Aspekte Aufteilen und Enthaltensein als gleichwertig ansehen; dann darf mit Recht auch das Ergebnis mit dem – dann als neutral aufzufassenden – Wort *Quotient*[59] benannt werden.

Verteilen

Zur Neueinführung wie auch zur erinnernden Wiederholung empfiehlt sich zunächst eine Division ohne Komma, jedoch mit Überträgen von einer Stelle zur nächsten. Exemplarisch soll an der Aufgabe „852 € verteilt an 6 Kinder“ eine mögliche Sprechweise genannt und in die schriftliche Darstellung überführt werden. Als in der 3. Klasse mit Rechengeld gearbeitet wurde, hießen die Schritte:

1. Verteile von deinem Vorrat zuerst die wertvollsten Scheine soweit wie möglich, fange also mit dem ersten Fach links – mit der höchsten Stelle – an.

   Bei 852 kannst du von 8 Hundertern jedem der 6 Kinder 1H geben, diese 6·1H hast du aus dem Vorrat entnommen, dort blieb nur noch ein Rest von 2H, der nicht an 6 verteilbar ist.

2. Wechsle den nicht verteilbaren Rest in Scheine der nächst kleineren Stelle und lege sie dort in das Fach dazu.

   Die verbliebenen 2H wechselst du also in 20 Zehner und legst sie ins Zehnerfach des Vorrats zu den darin liegenden 5 Zehner.

3. Verteile die Scheine aus diesem Fach wieder soweit es möglich ist, wiederhole also die Schritte 1 und 2. Gehe genauso von Stelle zu Stelle weiter bis zum Ende der zu verteilenden Anzahl. Dann ist der ganze Vorrat ausgeteilt.

Wenn du den 1. Schritt nun im Zehnerfach wiederholst, kannst du von den enthaltenen 25Z jedem der 6 Kinder 4Z geben. Diese 6·4Z entnimmst du aus dem Zehnerfach, dort bleibt ein Rest von 1Z. Der 2. Schritt sagt, dass du diesen Rest in Einer wechseln sollst, hier also 1Z in 10E, die zu den vorhandenen 2 Einern dazu gelegt werden. Nun wiederholst du den 1. Rechenschritt mit dem Einerfach und verteilst dessen Inhalt 12E an 6 Kinder und jedes bekommt 2E. Wenn nun die 6·2E entnommen sind, ist der ganze Vorrat ausgeschöpft; bei dieser Aufgabe bleibt kein Rest, es konnte alles gerecht verteilt werden.

4. Zur Probe kannst du das Ergebnis mit dem Teiler malnehmen, dann müsste wieder der Anfangsvorrat entstehen. Ist dies der Fall, so war die Rechnung richtig – es sei denn, du hast beim Teilen und Malnehmen denselben Fehler gemacht, oder es sind dir gar mehrere Fehler unterlaufen, die sich zufällig gegenseitig aufheben.

Bei unserer Aufgabe hat jedes Kind 1H 4Z 2E oder 142 € als seinen Anteil erhalten. Weil es insgesamt 6 Portionen der Größe 142 sind, können wir 6·142 nachrechnen und kommen wieder auf die Anfangszahl 852 zurück.

Das Rechenschema

Diese sehr bildhafte Darstellung enthält alle Elemente und Anweisungen, um daraus die schriftliche Form zu gewinnen:

Vorrat			Teiler		Portion			Arbeitsschritte
H	Z	E	:	E	= H	Z	E	
8	5	2	:	6	= **1**			8H verteilt an 6 ergibt **1H** für jede Portion,
- 6	(0)	(0)	-	6·1				6H kommen vom Vorrat weg, 2H bleiben als Rest

[59] In seiner ursprünglichen Bedeutung leitet sich das Wort Quotient von „wie oft“, also dem Enthaltensein ab.

2	5	(2)	:	6	=	4		und ergänzt die vorhandenen 5Z zu 25Z;
- 2	4	(0)	-	6·4				davon können wir 24 an 6 verteilen: ergibt **4Z**;
(0)	1	2	:	6	=		2	der Rest 1Z ergänzt die vorhandenen 2E zu 12E,
	- 1	2	-	6·2				verteilt an 6 ergibt **2E** für jede Portion. Dem Einerfach
	(0)	(0)						wurden 6·2 entnommen, es ist wie alle anderen Fächer leer. Der gesamte Vorrat ist restlos ausgeteilt.

H	Z	E			= H	Z	E
7	6	2	:	6	= 1	2	7
(-)6							
1	6						
(-)1	2						
	4	2					
	(-)4	2					
	(0)	0					

Ob an der Tafel oder gar im Heft die oben recht umständliche Hinführung auch wirklich geschrieben werden muss, hängt natürlich von der Klasse ab. Mit entsprechender mündlicher Schilderung können alle Schritte bereits in nebenstehender Kurzfassung notiert werden. Der Übergang dazu kann auch etwas fließender erfolgen, etwa indem das Minus und die Nullen danach mitgeschrieben werden. Die nicht aktuell zu bearbeitenden Ziffern werden erst dann „abgeholt“, wenn sie „dran“ sind. So vereinfacht sich das Schema und wird durch wiederholende Übung nach und nach zur Gewohnheit.

Der Übergang zu Dezimalzahlen kann eigentlich sofort erfolgen. Wurde die schriftliche Division aber erst neu eingeführt, so bereitet der Lehrer einige unproblematische Aufgaben (durch Multiplikation eines gewählten Quotienten mit dem gewünschten Teiler) vor, etwa in folgender Form als

Übungen:

a) 675 : 5 ; b) 872 : 4 ; c) 9720 : 8 d) 9264 : 4 e) 1944 : 8 f) 4734 : 9

Die Ausdehnung vom anfänglichen Hunderterbereich auf andere Zahlengrößen wird kaum Schwierigkeiten bereiten, weil die Arbeitsschritte bis auf die Stellennamen immer gleich ablaufen. Bei der Aufgabe e) ist die erste Stelle 1T im Dividenden zu klein, um beim Verteilen etwas abzugeben. Wir könnten dann im Ergebnis 0 schreiben und damit den 1.Schritt vollziehen; nach Wegnahme von 0 bleibt uns die Anfangsziffer 1T – als Rest im 2.Arbeitsschritt – unverändert erhalten und nach Wechsel in 10H kommt die zweite Ziffer des Dividenden 9H hinzu. Das können wir uns sparen, wenn wir gleich zu Beginn die beiden ersten Stellen als 19 Hunderter lesen und sofort mit dem Verteilen beginnen.

Vorrat			Teiler		Portion			Arbeitsschritte
E	, z	h			= E	, z	h	
8	5	2	:	6	= **1**			8E verteilt an 6 ergibt **1E** als Portion, Rest 2E. Beim
- 6	(0)	(0)	-	6·1				Wechsel zu 20 Zehnteln überschreiten wir das Komma.
2	5	(2)	:	6	=	, 4		Im Zehntelfach sind nun 25z, verteilt an 6 gibt **4z**; vor
- 2	4	(0)	-	6·4				diese setzen wir das Komma. 6·4z kommen weg,
(0)	1	2	:	6	=		2	1z bleibt und kommt als 1z = 10h zu den 2h im nächsten
	- 1	2	-	6·2				Fach mit dann 12h, verteilt an 6 ergibt **2h**.
	(0)	(0)						6·2h kommen weg und leeren damit das letzte Fach.

E	, z	h			= E	, z	h
7	6	2	:	6	= 1	2	7
(-)6							
1	6						
(-)1	2						
	4	2					
	(-)4	2					
	(0)	0					

Obige Division können wir sofort in der bereits bekannten schriftlichen Kurzfassung fixieren und die vorgenommenen Arbeitsschritte entsprechend obigem Text mündlich erörtern. Der Arbeitsablauf ist genau derselbe wie bei Dividenden ohne

Komma, neu ist lediglich die Kommasetzung am richtigen Ort. Dieser ist am Übergang von Einern zu den Zehnteln (und hier wie früher durch die Trennlinie gekennzeichnet).

Wenn wir diesen Übergang beachten, können wir auf die Kennzeichnung der Stellen mittels Spalten verzichten und es genügt dann alleine die

Kommaregel:

Wenn wir beim Dividieren im Dividenden das Komma überschreiten, setzen wir gleichzeitig auch im Quotienten das Komma – oder als Kurzfassung für die Kinder:

Wenn wir beim Teilen das Komma überschreiten, machen wir auch beim Ergebnis das Komma.

Da alle Rechenschritte genau gleich ablaufen, egal an welcher Stelle vor oder nach dem Komma wir uns gerade befinden, wird der Rechengang auch unabhängig von der Stellenbezeichnung. Wir müssen den Wechselvorgang von einer Stelle zur nächsten nicht mehr mit Namen begleiten und können uns von der gegenständlichen Bindung an das Bild des Geldes lösen: das rein Zahlenmäßige überwiegt mehr und mehr. Dies erlaubt dann auch den Übergang vom echten Teilen zum Enthaltensein, was die Suche für die richtige Zahl im Quotienten sehr erleichtert. Die Division „72 verteilt an 9“ ist ein eher äußerlicher Vorgang, während die Frage „wie oft ist die 9 in 72 enthalten“ an die Eigenaktivität anschließt und inneres Miterleben aufruft.

Das Rechenschema selbst wird automatisiert und steigert sich über die Gewohnheit zur Fertigkeit. Die schriftliche Division ist dann ein rekursiver Rechenvorgang, ein Algorithmus, mit dem alle Zahlen bearbeitet werden können. Ermöglicht hat ihn unsere gewohnte Zahlendarstellung im Zehnersystem, er spiegelt also die Konvention unseres Dezimalsystems.

Weil diese Form der rekursiven Division nur auf der blockweisen Schreibweise der Zahlen in gleichmäßig wiederholender Staffelung beruht, ist sie auch in jedem anderen Zahlensystem möglich. Das Wesen der Zahlenbeziehung zwischen Dividend, Divisor und Quotient wird zwar nicht direkt sichtbar, dieses prägt sich aber der Rechnungsdarstellung im jeweiligen Zahlensystem auf und macht sich dadurch erkennbar.

Im Unterricht können die Kinder zunehmend Freude am Dividieren gewinnen, vorausgesetzt die Einmaleins-Reihen stehen einigermaßen sicher zur Verfügung. Doch dann erleben sie die sich wiederholende Rechenanweisung im Algorithmus als verlässliches Geleit auf dem Weg zum richtigen Ergebnis. Die von den Kindern auch im Rechenunterricht geübten und innig geliebten lebensvollen Rhythmen klingen im Algorithmus noch nach, wenn auch nur blass und mechanisiert statt beseelt. Von ihnen verblieb zwar nur der schemenhafte Abglanz, sie wurden also zum Schema veräußerlicht, aber das sichere Weiterschreiten im sich wiederholenden Rhythmus blieb erhalten und kann als Grundstimmung immer noch empfunden werden.

Beim Übergang zu zweistelligen Divisoren ist die Sprechweise „Verteilen“ und damit die echte Division nur noch bei überschaubaren Zahlen sinnvoll benutzbar. Ein Beispiel dafür sind die beiden nachfolgenden Divisionen 768 : 24 = 32 und 771,36 : 24 = 32,14 mit der Eigenart, dass jeder Divisionsschritt mit glattem Zehner begonnen werden darf, um die jeweilige Ziffer im Quotienten zu erhalten. Hier führt also „70 verteilt an 20“ auf die richtige Ziffer „3“, mit der dann wie gewohnt weiter gearbeitet werden kann.

Weil damit die Kommaregel gewissenhaft auf mehrstellige Teiler ausgedehnt wird, kann der Lehrer sie durchaus nochmals für diesen speziellen Zweck benutzen. Wirklich nötig ist es jedoch nicht; wenn die schriftliche Division mit einstelligen Teiler selbstverständlich geworden ist, wird sie von den Kindern gewohnheitsmäßig – also mit Enthaltensein und Kommaregel – genauso selbstverständlich auf Mehrstelligkeit übertragen. Der Vollständigkeit halber wird jedoch eine mögliche Sprechweise für die echte Division mit Kommasetzung hiermit angeboten:

H Z |E| Z |E|
7 6 8 : 2 4 = 3 2
7 2
4 8
4 8
0

H Z |E| z h Z |E| z h
7 7 1,| 3 6 : 24 = 3 2,| 1 4
7 2 |
5 1 |
4 8 |
3 | 3
2 | 4
| 9 6
| 9 6
0

Beim gemeinsamen Rechnen an der Tafel können die Rechenschritte erläutert werden:

77 Zehner geteilt durch 24 (oder einfacher 70 geteilt durch 20) Zehner sind 3 Zehner (+Rest), schreibe das Ergebnis „3“, notiere „Z“ darüber; 3 × 24 sind 72; abziehen von 77 lässt den Rest 5 Zehner (= 50E). Mit dem „abgeholten“ 1 Einer ergeben sie gemeinsam 51 Einer. Geteilt durch 24 (oder einfacher 50 geteilt durch 20) ergeben sich 2 Einer, schreibe „2“, notiere „E“ darüber und hinter den 2 Einern das Komma. 2 × 24 sind 48; abziehen von 51 lässt den Rest 3 Einer.

Beim „Abholen“ wird nun das Komma zu den Zehnteln überschritten, dasselbe geschieht auch beim Ergebnis. Die „abgeholten“ 3 Zehntel ergänzen den vorhandenen Rest (3E = 30z) auf insgesamt 33 Zehntel; geteilt durch 24 ergibt nur 1 Zehntel; schreibe „1“, notiere „z“ darüber und kennzeichne den Übergang von den Einern zu den Zehnteln mit dem Komma. 1 × 24 sind 24; abziehen von 33 ergibt den Rest 9 Zehntel oder (mit der „abgeholten“ 6h) 96 Hundertstel. Diese geteilt durch 24 (wiederum als Vereinfachung 90 geteilt durch 20) ergeben 4 Hundertstel ohne Rest (4 × 24 = 96).

Natürlich genügt ein einziges solches Beispiel, um zu zeigen, dass die Erwartung richtig war: Die Kommaregel gilt in gleicher Weise auch für mehrstellige Teiler, wir dürfen also wie bisher gewohnt weiter arbeiten.

Die Anforderungen, welche das schriftliche Dividieren an die Rechenfähigkeit der Kinder stellt, sind durchaus beträchtlich. Auch wird der verfügbare zeitliche Rahmen rasch Grenzen setzen, so dass die Arbeit mit mehrstelligen Divisoren – wenn sie überhaupt noch innerhalb der 4.Klasse erreicht wird – kaum in wünschenswerter Fülle erübt werden kann. Dazu kommt noch, dass die Kinder durch überraschende Sonderfälle oder spezielle Rechensituationen irritiert werden können. Sie werden bei der Weiterführung in der 5. Klasse aufgezeigt, ebenso, wie sie zu überwinden sind, um den Rechengang dafür zu ebnen. Damit verbleiben für die Rechnungsart Dividieren genügend Arbeitsfelder in der 5. Klasse mit dem Ziel, dass die Division als frei verfügbare Fähigkeit zu erobern ist. Hier in der 4. Klasse beschränken wir uns daher auf gut bearbeitbare und tückenfreie Aufgaben, wobei das Angebot weniger aus Pflicht, denn aus Kür besteht. Sollte es dabei mangels sorgfältiger Vorsorge dennoch vorkommen, dass eine Division nicht rechtzeitig abbricht oder gar in einen periodischen Dezimalbruch ausartet, sollte ihnen bereits vorsorglich die Erlaubnis zum Abbruch bei ausreichender Stellenzahl – zum Beispiel bei der 3. Nachkommastelle – mitgeteilt sein. Generell wählt der Lehrer also das für seine Klasse machbare aus und überlässt das andere für das folgende Schuljahr. Als Anregung für Umfang und Schwierigkeitsgrad dienen nachfolgende

Übungen

1. a) 352 : 11 b) 375 : 15 c) 492 : 12 d) 1472 : 32 e) 4578 : 21 f) 10625 : 25

2. a) 19,5 : 15 b) 64,8 : 12 c) 33,92 : 16 d) 179,2 : 32 e) 238,5 : 53 f) 1557,6 : 44

3. a) 35,56 : 14 b) 78,32 : 22 c) 40,69 : 13 d) 169,95 : 33 e) 1115,92 : 52

4. a) 30,528 : 12 b) 77,568 : 24 c) 25,515 : 21 d) 87,535 : 41 e) 267,468: 62

Unabhängig ob und wie weit die 2-stellige Division in der Klasse möglich erscheint, lohnt sich eine Besonderheit, die beim Rechen im Alltag häufig auftritt.

Oftmals stehen nämlich nicht genügend Nachkomma-Stellen bereit, um die Division restlos zu beendigen. Hierfür kann aber an die Erfahrung bei der Schreibweise mit den Dezimalen beim Geld erinnert werden: Wenn 1€ an 2 Kinder verteilt werden, erhält jedes 50Ct oder 0,50€. Ermöglicht wird die entsprechende Division 1 : 2 also mit den zunächst nicht sichtbaren Nullen nach dem Komma:

1€ : 2 = 1,00€ : 2 = 0,50€

Weil wir bei jeder Zahl hinter dem Komma beliebig viele Nullen nach Bedarf anhängen dürfen, können wir auch jenseits des Ziffernangebotes des Dividenden hinaus die Division beliebig fortsetzen. Als hilfreiche Sprechweise für die Größengleichheit kann dienen:

25 sind 2 Zehner, 5 Einer und keine Zehntel oder auch:

25,0 sind 2 Zehner, 5 Einer und 0 (keine) Zehntel.

Die fehlenden Nachkommastellen ergänzen wir aber erst nach Bedarf während des Dividierens. Bei 25 : 2 verteilen wir also erst die beiden Zehner: 1Z; danach die 5 Einer: 2E, wobei 1E als Rest verbleibt und in 10 Zehntel gewechselt wird. Diese werden an 2 verteilt: 5z und wir setzen im Ergebnis zwischen 1E und 5z das Komma. Die Darstellung der schriftlichen Rechenstaffel folgt diesem schrittweisen Ergänzen der Nullen:

<table>
<tr><td>Z</td><td>Z</td><td>ZE</td><td>ZE</td><td>ZE|,z</td><td>ZE|,</td><td>ZE|,z</td><td>ZE|,z</td></tr>
<tr><td>25</td><td>: 2 = 1</td><td>25</td><td>: 2 = 12</td><td>25|,0</td><td>: 2 = 12|,</td><td>25|,0</td><td>: 2 = 12|,5</td></tr>
<tr><td><u>2</u></td><td></td><td><u>2</u></td><td></td><td><u>2 |</u></td><td></td><td><u>2 |</u></td><td></td></tr>
<tr><td>05</td><td></td><td>5</td><td></td><td>5|</td><td></td><td>5|</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td><u>4</u></td><td></td><td><u>4|</u></td><td></td><td><u>4|</u></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>1</td><td></td><td>1|0</td><td></td><td>1|0</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td><u>1|0</u></td><td></td></tr>
</table>

Diese Erweiterung des Dividenden mit zusätzlichen Nullen kann natürlich an jeder Nachkommastelle erfolgen, an welcher der Bedarf auftritt. Die Aufgabe 5,3 : 2 wird während der laufenden Rechnung auf 5,3*0* : 2 ergänzt und ermöglicht damit das Ergebnis 2,65. Bei 5,3 : 4 muss bereits mit 2 Nullen ergänzt werden, bis die Division endet. Eine weitere Besonderheit ist bei der anfangs genannten Division 1 : 2 die (hier führende) Null im Quotienten. Unsere Argumentation wird heißen: Von dem einzigen Einer kann nichts direkt verteilt werden, also steht im Ergebnis 0E, es bleibt aber Rest 1E; nach Wechsel in 10z kann verteilt werden zu 5z (nach Kommasetzung) und die Division damit durchführbar als 1,*0* : 2 = 0,5 oder für die gewohnte Euro-Schreibweise auch mit einer weiteren Nachkommastelle als 1,*00* : 2 = 0,50.

Gleichzeitig wird mit diesem Schritt eine latente Frage geklärt, die möglicherweise die Kinder im Unklaren ließ: Warum hat der Lehrer nicht die alte Kommaregel vom Malnehmen übernommen?

Dort blieb die Anzahl der Kommastellen von der Anfangszahl (Multiplikand) hin zum Ergebnis erhalten; beim Teilen hatte die Anfangszahl (Dividend) doch auch immer gleich viele Kommastellen wie das Ergebnis (Quotient). Aber die obigen Beispiele haben diese Vermutung widerlegt: Es mussten während der Rechnung weitere Stellen angefügt werden. Auch wenn diese nur aus Nullen bestanden, also ohne Wert waren, wich die Anzahl der Stellen danach voneinander ab. Dazu gibt es genügend Divisionen, bei denen eine ganze Zahl zu einem Ergebnis mit Kommastellen führt. Dagegen blieb die Art unserer Kommasetzung (beim Übergang von Einern zu Zehnteln) trotz zugefügter Nachkommastellen erhalten und ist damit bestätigt.

Abgesehen von noch nicht erlaubten Kommastellen im Divisor sind im Prinzip nun fast alle Divisionen möglich. Dennoch sorgt der Lehrer in der 4. Klasse dafür, dass seine Aufgabenauswahl den Möglichkeiten seiner Klasse entspricht und vor allem kein periodischer Dezimalbruch auftritt, die Rechnung also immer noch „aufgeht“.

Aufgaben:

1. a) 30 : 4 b) 15 : 6 c) 27 : 6 d) 13 : 4 e) 34 : 8 f) 125 : 2 g) 125 : 4
2. a) 26,3 : 2 b) 11,6 : 8 c) 27,3 : 4 d) 41,4 : 12 e) 51,1 : 14 f) 49,2 :15 g) 69,3 : 22
3. a) 9,8 : 8 b) 9,9 : 8 c) 250 : 16 d) 42,15 : 18 e) 303 : 24 f) 0,7 : 4 g) 5 : 8
4. a) 6,75 Euro : 5 b) 26,52 : 4 c) 76,26: 6 d) 259,68 : 8
5. Ronja und Jonas sollen Brot kaufen und bekommen dafür 5,- Euro mit. „Den Rest dürft ihr euch teilen“, ruft ihnen die Mutter nach. Das Brot kostet nur 3,20 Euro.
6. Ein Kasten mit 12 Flaschen Apfelsaft kostet 15,36 Euro. Wie viel würde eine Flasche kosten?
7. Der Gartenschlauch hat normalerweise ½ Zoll als Durchmesser. Wieviel Zentimeter sind dies? (1 Zoll = 2,54cm)
8. Der Hof soll mit einem 14,8m langen Zaun abgegrenzt werden. Wie lange muss jedes Zaunfeld werden, wenn man den Zahn in 8 gleiche Felder einteilt?
9. Nachdem 2,1 Liter Marmelade eingekocht wurden, füllt man sie gleichmäßig in 6 Gläser ab. Wieviel kommt in jedes Glas?
10. Im Gartenbau transportieren 3 Schüler mit ihren Schubkarren insgesamt 52,2 kg Kompost weg. Wieviel wäre in jeder Karre, wenn das Gewicht genau gleich verteilt würde?

Gewöhnliche Brüche – Dezimalbrüche

Obwohl im Unterricht die Dezimalbrüche von den „normalen“ Brüchen abgeleitet wurden, kann für die Kinder das Gefühl verbleiben, dass die beiden in ganz verschiedenen Welten zu Hause sind. Die einzuübenden Rechenverfahren scheinen ebenfalls grundverschieden. Dabei wäre es ideal, wenn die Kinder zwischen den beiden Schreibweisen beliebig wechseln würden, damit sie bei Aufgaben für den Lösungsgang so die jeweils geeignetste Form wählen könnten.

Die gegenseitige Umwandlung von Dezimalbrüchen und gewöhnlichen Brüchen bleibt zwar als generelles Thema der 5. und 6. Klasse vorbehalten, ist mit ausgewählten Zahlen in der 4. Klasse in begrenztem Rahmen machbar. Daher soll aber hier noch eine mögliche Hinführung angeboten werden.

Zunächst können die einfachen Bruchteile, welche durch die Teilung des Geldes vertraut sind, erinnert werden; die Kinder sollten sie möglichst auswendig wiedererkennen. Dabei bietet sich nun auch die Schreibweise „1/1“ als „ein Eintel“ für „ein Ganzes“ an (entsprechend den „2/2“ für „zwei Halbe“):

1 Ganzes: 1/1 = 1,00 oder 1 (= 1 Einer oder 100 Hundertstel)
1 Halbes: ½ = 0,50 (50 Hundertstel) oder 0,5 (5 Zehntel)
1 Fünftel: 1/5 = 0,20 (20 Hundertstel) oder 0,2 (2 Zehntel)
1 Zehntel: 1/10 = 0,10 (10 Hundertstel) oder 0,1 (1 Zehntel)
1 Zwanzigstel: 1/20 = 0,05 (5 Hundertstel)
1 Fünfzigstel: 1/50 = 0,02 (2 Hundertstel)
1 Hundertstel: 1/100 = 0,01 (1 Hundertstel)

Bei Ganzen, Zehnteln und Hundertsteln ist bereits die direkte sprachliche Übereinstimmung der beiden Darstellungsarten zu erkennen. Bei den dazwischen liegenden Werten wird die Entsprechung durch passendes Erweitern oder Kürzen erreicht: Aus 1/20 wird durch Erweitern mit 5 der Bruch 5/100, welcher dezimal als 0,05 geschrieben wird; umgekehrt können 0,05 als 5/100 gelesen werden, welche nach Kürzen durch 5 auf 1/20 führen.

Doch nicht immer ist dies so leicht zu erkennen. Aber aus jedem gewöhnlichen Bruch können wir stets die entsprechende Dezimalzahl bekommen, wenn wir die Division durchführen, auf welche der Bruch ja selbst hinweist. So können wir mit unserer Kommaregel beim Teilen bereits die Brücke zum Bruchrechnen bilden. Dabei wird der Lehrer in der 4. Klasse noch darauf achten, dass nur rechtzeitig abbrechende und keine periodischen Dezimalbrüche entstehen. Dies erlaubt bei den gewöhnlichen Brüchen nur Nenner, die – nach Kürzen aller mit dem Zähler gemeinsamen Faktoren – aus Vielfachen von 2 und 5 bestehen. Doch bleiben wir eher bei sehr einfachen Zahlen, denn schon mit einstelligem Divisor (und ganzzahligem Dividenden) können Aufgaben die Beziehung zum klassischen Bruchrechnen aufzeigen. Als wir die ersten Bruchteile bildeten, geschah dies als Aufteilen von zunächst einem und dann mehreren Ganzen:

So wurde 1 Ganzes in 2 Teile geteilt und jedes dieser Teile mit ½ benannt; ¾ erhielt man beim Verteilen von 3 Ganzen auf 4 gleiche Teile. Wenn in der 4. Klasse noch dafür Zeit eingeräumt werden kann, sind solche Umdeutungen von Brüchen als Teilungsaufgaben lukrativ. Mit ihnen gelingt die einfache Umformung von gewöhnlichen Brüchen in die Dezimaldarstellung.

Den Bruch 5/4 erhalten wir, wenn 5 auf 4 Portionen verteilt wird; dies führt auf die Division 5 : 4 welche mit 2 Nachkommastellen lösbar wird: 5,*00* : 4 = 1,25

Bei echten Brüchen ist der Zähler kleiner als der Nenner und der Wert des Bruches liegt unter 1; der zugehörige Dezimalbruch beginnt also mit einer führenden Null, wie es bereits weiter oben mit dem Beispiel 1 : 2 besprochen wurde. Mittels einfacher Divisionen sollten die Kinder die Alltagsbruchteile wie ½ ; ¼ ; ¾ ; 1/5 und 1/8 als Dezimalbruch wieder erkennen. In diesem Sinne lohnen sich folgende

Aufgaben

Rechne die Brüche in Dezimalzahlen um, indem du dividierst:

a) ½ = 1 : 2 b) ¼ = 1 : 4 c) ¾ = 3 : 4 d) $^1/_5$ e) 2/5 f) 1/8 g) 3/8 h) 7/2

Größenvergleiche

Ein besonderer Vorteil der Dezimalzahlen beruht darauf, dass ihre Größe untereinander direkt verglichen werden kann. Bei gewöhnlichen Brüchen muss dagegen der Vergleich meist durch Erweitern erst vorbereitet werden (während Dezimalbrüche mit gleicher Stellenzahl hinter dem Komma automatisch „gleichnamig“ sind):

Welcher der beiden Brüche ist größer: ¾ oder 4/5 ?

Mit Brüchen: ¾ wird mit 5 erweitert zu 15/20; 4/5 wird mit 4 erweitert zu 16/20; damit ist der Bruch 4/5 um 1/16 größer als ¾ .

Die zugehörigen Dezimalbrüche erhalten wir aus 3 : 4 = 0,75 und 4 : 5 = 0,80; dabei erkennen wir letzteren Wert sofort als den (um 0,05) größeren.

Sachrechnen

Die dezimale Teilung der meisten Maße (Geldwert, Längen, Flächen, Volumen, Gewicht) eröffnet den Dezimalzahlen ihr eigentliches Anwendungsgebiet. Die damit möglichen Aufgaben aus der täglichen Erfahrung zeigen unmittelbar und anschaulich, wie sinnvoll und praktisch es ist, diese Zahlen zu verwenden und wie sehr ein sicherer Umgang mit ihnen das Leben erleichtert.

Durch die Erweiterung des Dezimalsystems (Zehnersystems) mit Kommastellen können wir also nicht nur die gewöhnlichen Brüche in neuer Weise schreiben, sondern auch im Sachrechnen Maße in einfacher Weise weiter untergliedern, wie wir es in der 3. Klasse bereits kennen gelernt haben. So lassen sich bei Änderung der Einheit die Größenangaben alleine durch Versetzen des Kommas bestimmen. Lediglich die Zeit- und Winkelmaße stellen hier eine Ausnahme dar, weil deren Teilungen nicht dezimal erfolgen und sich daher die Ziffern ändern beim Wechsel der Einheiten (3,25 Stunden sind 3 Stunden 15 Minuten; während 3,25 Meter leicht zu 3 Metern und 25 Zentimetern verwandelt werden können).

Die gängigen Maß-Vorsilben

Die Umwandlung der Größen erfolgt in Zehner- bzw. Tausenderschritten mittels Vorsilben. Von diesen kennen und benutzen wir meist die Silben Mega (M) für Million, Kilo (k) für Tausend, Zenti für Hundertstel (c), Milli (m) für Tausendstel und vielleicht noch Mikro (μ = mü) für Millionstel oder Nano (n) für Milliardstel bei Spurenanalysen, sowie Giga (G) für Milliarde oder Tera (T) für Billion bei Jahresmeldungen der Energiewirtschaft oder Datenmengen in der EDV. Alleine aufgrund der Zahlengröße wird für die 4. und 5. Klasse der zu benutzende Bereich innerhalb ersten 3 Stellen über (bis kilo) und unter (bis milli) der Einer ausreichen und dabei auch auf die weniger gebräuchlichen dazwischen verzichten.

Die Vorsilbe Hekto für 100 kommt bei den für Kinder geläufigen Maßen nicht vor, im Alltag sind dies für uns Erwachsene allenfalls das Hekto-Pascal für den Luftdruck[60] und der Hektoliter für Fassinhalte. Außer bei technischen Gewichtsangaben[61] wird die Vorsilbe Deka bei uns gar nicht benutzt. Doch andere Länder, andere Sitten: Bei kleineren Lebensmittelmengen, wie etwa an der Käse- oder Wursttheke, sind in Österreich Dekagramm und in Italien Hektogramm üblich; der Kundenwunsch nach 200 Gramm hieße also „20 Deka“ (= 20Dg) oder „2 etto“ (= 2hg). In der 4. Klasse können wir also Deka und Hekto ohne weiteres vernachlässigen und nur bei Nachfragen auf ihre Existenz und seltene Benutzung hinweisen.

Ähnlich unbeachtet im Alltag ist das Dezi als Zehntel einer Einheit; im Grunde kommt es nur in der Schule „der Vollständigkeit halber“ als Unterrichtsinhalt und realiter auch nur am Tafellineal als Farbwechsel in Dezimeter-Intervallen vor. Technisch interessierten Erwachsenen ist das Dezi geläufiger, meist jedoch nicht bewusst: Die Schallemission von Geräten und sonstige Lautstärken werden in Dezibel (dB), also Zehnteln des Maßes Bel angegeben.

Das scheinbar recht beliebte Zenti wird überraschenderweise nur sehr begrenzt eingesetzt, fast ausschließlich für die Längenmessung als Zentimeter. Bei anderen Maßen wird es gemieden. Das Milli wird von Schülern in der 4. Klasse dagegen weniger wahrgenommen: Bei Milligramm ist keine Gewichtsempfindung mehr möglich, Millimeter klingt übertrieben genau und wird meist nur für die Abweichung von vollen Zentimetern benutzt. In der Technik

---

[60] Das klassische „Barometer“ zeigte als normalen Luftdruck 1 bar und war skaliert mit 1000 mbar. Bei der Umstellung von Bar auf die wesentlich kleinere Druckeinheit Pascal (1 bar = 100.000 Pa) bot sich die Vorsilbe h an, um damit die alten Zahlenwerte beizubehalten: 1.000 mbar = 1.000 hPa; beim Blutdruck wurde die noch ältere Einheit Torr (oder „mm Hg“) beibehalten, die noch vom Quecksilberbarometer stammt (760 Torr = 1013 hPa für normalen Luftdruck).

[61] Das Kilogramm bezieht sich auf die Materialmenge (=Masse), das Gewicht stellt dagegen eine Kraft dar und wird korrekterweise in Newton gemessen; auf der Erde drückt die Masse 1kg mit 9,81N (ca 10N) auf ihre Unterlage. Für die Gewichtsangaben von Lasten aller Art konnten mit der Einheit Deka-Newton (DN) die bisherigen Zahlenangaben von Kilogramm beibehalten werden. Bei Fahrzeugen findet sich eine solche Angabe am Kotflügel, um die Achslast anzugeben, beim Pkw-Anhänger steht z.B. „750 DN“ statt der früher üblichen 750kg.

dagegen sind Millimeter das allein benutzte Längenmaß, selbst im Kfz-Brief sind die Fahrzeugmaße in mm angegeben.

Im Alltag kann sich einzig das Liter mit Milli behaupten als Inhaltsangabe für Kleinmengen bei Getränken. Doch ausgerechnet das beliebte Kilo wird dem Liter versagt: 1000 Liter bekommen nicht wie zu erwarten wäre das Kiloliter, sondern den Kubikmeter. Bei der Raummessung wird später in Mathematik und Physik das Liter selbst noch durch dm³ und das Milliliter durch cm³ ersetzt.

Es gibt also gute Gründe, lieber wenige, dafür wiederkehrende und alltagstaugliche Maße und Umwandlungen zu bevorzugen. Wenn man dabei mit Verschiebungen um 1, 2 und 3 Stellen arbeiten will, gehören dazu: Kilogramm – Gramm und Kilometer – Meter (3 Stellen); Meter – Zentimeter (2 Stellen); Zentimeter – Millimeter (1 Stelle); Liter –Milliliter (3 Stellen).
Der zeitliche Rahmen wird innerhalb der 4. Klasse allerdings recht begrenzt sein, so dass dieses Thema nur schwerlich in seiner Gänze behandelt und auch noch geübt werden könnte. Erfahrungsgemäß sind selbst in der 5. und 6. Klasse die elementaren Maßumwandlungen ein immer wieder vorzunehmendes Übungsfeld.

Vorsilben als Stellenverschiebung

Zunächst werden die gängigsten Vorsilben mit ihrer Bedeutung als Tabelle notiert. Wir beschränken uns auf die ersten 3 Stellen oberhalb und unterhalb der Einer und verzichten selbst innerhalb dieser auf die weniger gebräuchlichen:

k = kilo	= × 1000	3 Stellen mehr	1 km	= 1000 m
(h) = (hekto)	= (× 100)	(2 Stellen mehr)		
(D) = (Deka)	= (× 10)	(1 Stelle mehr)		
d = dezi	= × 1/10	1 Stelle weniger	1 dm	= 0,1 m
c = centi	= × 1/100	2 Stellen weniger	1 cm	= 0,01 m
m = milli	= × 1/1000	3 Stellen weniger	1 mm	= 0,001 m

Haben alle Kinder diese Zuordnungen auswendig sicher zur Verfügung, so verbleibt dennoch bei etlichen die Unsicherheit, in welche Richtung das Komma zu schieben ist. Tatsächlich ist die Aussage „3 Stellen mehr“ bei „kilo“ kein klarer Hinweis auf die nötige Tätigkeit. Zwar sagt uns die Vorsilbe „k“, dass sie die benutzte Maßzahl um den Faktor 1000, also um 3 Stellen vergrößert. Doch die Folgerung, dass dann bei der Umwandlung von Metern in Kilometern die Maßzahl von uns um 3 Stellen zu verkleinern ist, erschließt sich nicht automatisch daraus; an diese Gegenläufigkeit gewöhnen sich die Kinder am besten mit bildhaften Aussagen wie: „Weil 1 Kilometer viel länger ist als 1 Meter, brauche ich viel weniger km statt m für meine Strecke“ oder „1 mm ist so winzig klein, dass ich davon ganz viel brauche für eine Strecke in Metern“.

Maßumwandlungen durch Stellenverschiebung

In das Heft gehören nach der Vorsilbentabelle einige gemeinsame Umrechnungen, anfangs kann die nötige Stellenverschiebung noch als Text dazu kommen, etwa:

321 g = 0,321 kg; 22 g = 0,022 kg; 2038 g = 2,038 kg.

Bei der Umwandlung von Gramm in das 1000-mal schwerere Kilogramm wird also das Komma einfach um 3 Stellen nach links verschoben und die Maßzahl um 3 Stellen verkleinert.

Umgekehrt verschieben wir das Komma um 3 Stellen nach rechts, wenn wir von Kilogramm zu Gramm übergehen:

3,218 kg = 3218 g oder 0,0075 kg = 7,5 g.

Auch hier bietet sich eine Argumentationshilfe an: Weil 3,218 kg mehr als 3 Kilogramm sind, müssen dies über 3000 Gramm sein. Bei der umgekehrten Umrechnung hatten wir mit 2038 g etwas mehr als 2000 Gramm oder 2 Kilogramm.

Nicht alle Kinder werden die richtige Veränderung der jeweiligen Maßzahl für die neue Vorsilbe ohne notierte Zwischenschritte direkt als Lösung schreiben können. Sinnvollerweise entwickelt der Lehrer dafür mit den Kindern eine gemeinsame Sprache und leitet daraus eine verlässliche Darstellungsform ab, auf die immer zurück gegriffen werden kann. Im Schulalltag bewährt haben sich folgende

Tipps zur Schreibweise

Wenn z.B. die Messgröße 250 Gramm – das Gewicht einer Butterpackung – mit kg geschrieben werden soll, ist die neue Einheit 1000-mal größer und von ihr wird nur viel weniger für das gleiche Gewicht gebraucht, genauer 1/1000 oder 0,001-mal von der alten Maßzahl. Dieser Schritt wird von uns mittels Kommaverschiebung durchgeführt. Als Schreibformen im Heft und für die Tafel für diesen Vorgang sind geeignet:

Abb. 24: Stellenverschiebung

a) 1/1000 b) 0,001-mal c) Kommaverschiebung

Messen, Wiegen, Zählen

Am besten sind natürlich eigene Messerfahrungen, welche die Kinder in der Klasse oder zu Hause selber machen dürfen, um dann die Maße mit verschiedenen Vorsilben auszudrücken.

Ihre im letzten Schuljahr vertraut gewordene stabile Tafelwaage kann aus der 3. Klasse nochmals kurz entliehen werden, Messbecher und Meterstab bringen sie von zu Hause mit. In der Physiksammlung gibt es vielleicht interessante alte Waagentypen: Schnellwaage von fliegenden Händlern (Balken-Handwaage mit verschiebbarem Gewicht), stabile Federwaage mit 25- oder gar 50kg-Skala vom Lumpensammler, eine Brücken- oder Dezimalwaage wie sie beim Bauern und in der Mühle üblich waren.

Wir verzichten bewusst auf digitale Messgeräte, damit wir die Größen mit dem Tun unserer Hände und dem Beobachten unserer Augen begreifen und uns aktiv in der Welt orientieren. Zum Messen lässt sich vieles finden, das sich auch für weitere Bearbeitungen eignet; Ideen dazu schildern folgende

Beispiele von möglichen Mess-Ergebnissen:

1. Wie groß und wie schwer ist ein Ziegelstein?

Carl nimmt den Meterstab und liest genau ab: 11,5cm breit; 7cm hoch; 24cm lang.

Frank legt ihn auf die Waage und sagt: „3Kilo und 560 Gramm“.

Noemi rechnet die Längenmaße in Meter und das Gewicht in Gramm um. Was bekommt sie heraus?

3. Bei unserer Blumengießkanne interessiert uns ihr Gewicht und Fassungsvermögen: Sie wiegt leer 365g und voll 2,225kg, sie fasst 1,86 l als Inhalt. Wie groß ist das Leergewicht in kg? Wie groß der Inhalt (das Volumen) in Dezi-, Centi-, Millilitern? Berechne das Wassergewicht in Kilogramm: 2,225kg – 0,365kg = ? und vergleiche es mit dem Volumen in Litern.

4. Anna stellt sich auf die Dezimalwaage. Auf dieser besonderen Waage kann jedes Kilogramm auf der Waagschale gegenüber der Last schon 10 kg ausgleichen. Bert legt

Gewichte auf die Waagschale, bis sich die Waage einpendelt bei 1kg +500g +200g +200g +50g +20g +10g.

4a) Wieviel liegt auf der Schale (erst in Gramm, dann Kilogramm)

4b) Dann wiegt Anna 10-mal so viel. Wie schwer ist sie?

4c) Anna setzt nun ihren Ranzen auf und lässt sich nochmals wiegen. Bert braucht andere Gewichte: 2kg + 100g + 50g + 20g + 20g. Wie schwer ist der Ranzen?

5. Christian testet, wie weit er mit dem Fahrrad in genau 1min kommt. Er liest auf seinem Tacho dem km-Stand ab: 528,72km. Auf seiner Universaluhr stellt er als Alarmzeit 1 Minute ein, drückt auf Start und fährt los. Nach genau 1min bremst er ab und liest nun den Tacho ab: 529,15km. Wieviel Meter schaffte Christian in 1 Minute?

Übungen zum Umwandeln von Maßeinheiten

Übungen der folgenden Art können sowohl als Stillarbeit im Heft als auch in halb schriftlicher Arbeit an der Tafel oder als Kopfrechenübung gemacht werden.

1) Drücke die Angaben in Gramm in Kilogramm aus:

248 g; 369 g; 428 g; 504 g; 1211 g; 36000 g; 98 g; 44 g; 12 g; 4 g; 1 g.

2) Wieviel Gramm ergeben jeweils diese Gewichte?

a) 3 kg; 3,4 kg; 3,45 kg; 3,456 kg; 3,4567 kg; 3,45678 kg.

b) 0,7 kg; 0,07 kg; 0,007 kg; 0,174 kg.

c) Rechne dein Gewicht in Gramm um.

3) Schreibe 720 m als Kilometern und auch als Millimeter.

4) Wandle 2,71 m in a) Millimetern, b) Zentimetern und d) Dezimetern um.

5) Getränkemengen in Gaststätten und der Inhalt von Flaschen oder Saftkartons können ganz unterschiedlich angegeben sein: Apfelschorle ½ l, Orangensaft 25 cl, Limo 350 ml, Mineralwasser 0,75 l. Rechne alle genannten Größen um in

a) Liter

b) Milliliter

c) sortiere sie dann der Größe nach.

Aufgaben aus dem Sachrechnen

Längenmaße

6) Die Größe von Fahrzeugen wird in Millimetern angegeben. Das sind wir nicht gewohnt, wir benutzen lieber Meter und Zentimeter. Beim Smart beträgt die Länge 2695mm, beim Mercedes SL Cabrio sind es 4631 mm.

a) Wie Millimeter ist das Cabrio länger?

b) Gib die beiden Autolängen und ihren Unterschied in Metern an (als Dezimalzahl).

c) Rechne die 3 Größen in Zentimeter um.

7) Ein normales Schulheft hat 32 Seiten. Der Umschlag ist 0,35mm dick, ein Blatt nur 0,15mm.

a) Wie dick ist ein Heft? (16 Blätter mit 2 Umschlagseiten)

b) Auf dem Lehrertisch sind die Hefte aller 34 Kinder gestapelt. Wie hoch ist dieser Stapel in Zentimetern?

c) Wie hoch (in Metern) würde ein Turm von 12 Epochenheften des ganzen Schuljahres von allen Schülern?

Alte Gewichte

Bei vielen Gewichtangaben von Lebensmitteln erkennt man noch immer ihre Herkunft vom früher so beliebten Maß „Pfund“. 1 Pfund ist gleich schwer wie ½ Kilogramm.

8) Ältere Leute sagen zur Packungsgröße von Butter immer noch gerne „½ Pfund“. Schreibe das Gewicht dieses Butter-Stücks in Kilogramm

8a) erst als gewöhnlichen Bruchteil von einem kg

8b) und dann als Dezimalbruch.

8c) Wie viel Gramm enthält eine Butter-Packung?

9) Für eine kleine Wurstportion war die Größe ¼ Pfund genau passend und ist auch noch heute üblich, allerdings steht das Gewicht nun in Gramm darauf. Rechne ¼ Pfund als Bruchteil eines Kilogramms aus, damit du weißt wodurch du das Kilogramm teilen musst. Wandle danach das berechnete Gewicht in Gramm um. Achte beim nächsten Einkauf darauf, ob du eine solche Packungsgröße entdecken kannst.

10) Bestimmt hast du auch schon die kleinen einzeln eingewickelten Käseecken gesehen, die zu 8 Stück gemeinsam eine runde Schachtel füllen. In der großen Ausführung hat die ganze Schachtel 1 Pfund, es gibt auch kleine mit nur ½ Pfund. Wie schwer ist darin jeweils eine Ecke?

11) Die kleinen Hefewürfel sind noch heute in 42g-Protionen abgepackt, das ist doch ein seltsames Gewicht, oder? Vor langer Zeit, als es noch keine Supermärkte mit fertig verpackten Waren gab, holte man seine Lebensmittel beim Einzelhändler. Den nannte man meistens Krämer, weil er jeden Kram für den täglichen Gebrauch verkaufte, so auch die Backhefe. Er bekam sie pfundweise angeliefert, viel zu groß für die Hausfrau. So schnitt der Krämer den großen Würfel mit 2 Schnitten übers Kreuz in 4 schmale Stangen und verteilte dann diese jeweils in 3 Würfelchen. Von diesen reichte dann genau einer zum Brotbacken. Wie schwer ist ein solcher Würfel?

Bei allen Sachrechnungen sind Abschätzungen eine gute Hilfe, um die richtigen Größenvorstellungen mit den benutzten Dezimalzahlen zu verbinden. Wir können zum Beispiel die Addition auf einem Kassenzettel rasch und erstaunlich genau überschlagen, wenn wir jeden der (meist recht „krummen“) Beträge durch „runde“ Beträge ersetzen, indem wir die nächstliegende Zahl mit der Endung ...,00 oder ...,50 bevorzugen. Das Runden nach korrekten Regeln können wir aber in der 5. Klasse nachholen, auch dessen sinngemäße Übertragung auf Überschlagsrechnungen.

Das Ziel: Sichere Grundrechenarten mit Dezimalzahlen

Ausreichend Übungszeit soll den Schülern eingeräumt werden, um sich die schriftlichen Grundrechenarten anzueignen und darin eine verlässliche Sicherheit zu erwerben. Dies ist nicht nur für den Unterrichtsfortgang von Bedeutung, sondern auch für die Standfestigkeit der Schüler im Alltagsleben und damit auch für ihr Selbstvertrauen.

Bei Addition und Subtraktion schützt die Spaltenschreibweise (Komma unter Komma) vor fehlerhafter Stellen-Zuordnung. Fehlende Stellen hinter dem Komma ergänzen wir durch Nullen. Auch mehrere Zahlen untereinander können wir gleichzeitig zusammenzählen. Sind Addition und Subtraktion innerhalb einer Rechnung gemischt, so werden sie am sichersten schrittweise abgearbeitet.

Bei Multiplikation und Division beschränken wir uns noch auf überschaubare ganze Zahlen für den aktiven Multiplikator beziehungsweise Divisor. Dabei dürfen „einfache“ oder „schöne“ Zahlen (12; 15; 20; 24; 25; ...) bevorzugt werden. Große Freude haben die Schüler auch daran, wenn die Rechen-Ergebnisse besondere Ziffernfolgen aufweisen und die Richtigkeit der Rechnung gewissermaßen „belohnt" wird[62].

Beispiele

1. mit bequemen Zahlen

[62] Verschiedene Beispiele (ohne Komma) dazu finden sich in Baravalle, a.a.O., S.59 ff. sowie im Anhang

a) 3,53 × 24 b) 8,452 × 15 c) 45,285 × 122 d) 225,44 × 125

e) 51,15 : 15 f) 1326,6 : 55 g) 135,333 : 22 h) 56,694 : 33

2. mit besonderen Ergebnissen

a) 17,17 + 71,71 b) 21,21 + 2,247 + 99,999 c) 987,654 + 0,001 + 10,101 + 12,345

65,65 – 32,32 e) 99,99 – 10,1 – 1,01 f) 56,49 – 23,15 + 66,66

g) 52,67 – 13,899 + 1,330 – 40,101 h) 69,93 : 21 i) 124,6845 : 101 j) 55,55 : 25

Ergänzendes

Kopfrechnen

Obwohl schon in der 3. Klasse mit dem großen Einmaleins (bis 10×20) begonnen wurde, entdeckt man in den folgenden Klassen bei einzelnen Schülern immer wieder erhebliche Lücken im „kleinen" Einmaleins. Diese behindern die schriftlichen Grundrechenarten erheblich, vor allem das Teilen. Daher ist die regelmäßige Wiederholung des Einmaleins auch in der 4. Klasse zu pflegen, vermutlich sogar noch in der 5. Klasse. Insbesondere ist auf die rechenschwachen Schüler zu achten, dass sie sich – wenn möglich, auch mit häuslicher Hilfe – das Einmaleins aneignen; der Lehrer fordert es von ihnen, um sie zu fördern.

Statt die Reihen bei 10mal zu beenden, ist es reizvoll (und nützlich), diese bis 12× fortzusetzen. Bei den Zahlen über 10 lohnen sich besonders Elfer, Zwölfer, Fünfzehner und 25er (bis jeweils 12mal) und die Quadratzahlen können als besondere Zahlenreihe bis 15×15 herausgehoben werden.

Die übrigen Reihen des großen Einmaleins helfen zwar über die Gedächtnisbildung hinaus auch noch, den Zahlenraum bis 400 zu strukturieren; für die schriftlichen Rechenarten sind sie ebenfalls förderlich – aber dennoch entbehrlich! So mag der Lehrer selbst entscheiden, wie viel Wert (und Zeit) er dieser Fertigkeit zuteilen will.

Als Bereicherung des Einmaleins eignen sich auch die anfangs vorgeschlagenen

- Rechenketten mit aufeinander folgenden Multiplikatoren und Divisoren:

  Frei gewählte Zahl, nacheinander × 4 × 3 × ½ oder gerade Zahl wählen, dann × 3 × $^1/_6$ × 5

  Mit Brüchen: einfachen Stammbruch wählen, dann × ½ × 1/3 oder entsprechend schwieriger

- die Reihen der Bruchteile von (entsprechend teilbaren) Zahlen:

  $^1/_6$ von 42 ist 7; $^2/_6$ (oder $^1/_3$) von 42 sind dann 14; ... oder $^1/_9$ von 72 ist 8; $^2/_9$ von 72 sind ...

- und das Einmaleins der Bruchteile (mit Kürzen):

  Die Reihe der Achtel heißt $^1/_8$; ¼; $^3/_8$; ½ ; $^5/_8$; ¾ ; $^7/_8$; 1 ; $1^1/_8$ ...

Das Bruchrechnen kann zusätzlich unterstützt werden, indem wir

- Zahlen rückwärts als Produkte in Faktoren zerlegen

  24 = ? (Antworten: 2×12; 3×8 usw.)

- oder gemeinsame Teiler zu zwei vorgegebenen Zahlen gesucht werden:

  Welche Zahlen passen gleichzeitig in 18 und in 30? (2; 3; 6)

Die Dezimalzahlen können

- nacheinander in Zehnerschritten anwachsen oder kleiner werden:

  2,5 jeweils ×10 gibt die Reihe 2,5 ; 25 ; 250 ; ... mit :10

wieder zurück bis 2,5 ; 0,25 ; 0,025
- dasselbe in Hunderterschritten
- die Maßumwandlungen durchlaufen
12,5mm = 1,25cm = 0,125dm = 0,0125m = 0,0000125km
- verdoppelt und halbiert werden[63]
0,05; 0,1 ; 0,2 ; 0,4 ; 0,8 ; 1,6 (nicht „Komma 16“!) ...
5,12 ; 2,56 ; 1,28 ; 0,64 ...
- mit Maßen
12,5mm ; 25mm ; 50mm ; ...
oder 0,0125m ; 0,025m; 0,05m ; ...
oder 25mm ; 5cm ; 1dm ; 2 dm ; 4 dm ; 8 dm ; 1,6 m ; ...
- mit 5 multipliziert werden (um eine Stelle größer machen und dann halbieren)
0,024 ; 0,12 ; 0,6 ;
- durch 5 dividiert werden (um eine Stelle kleiner machen und dann verdoppeln)
3,5 ; 0,7 ; 0,14 ; 0,028 ; ...

Blitzrechnen

Gerade im Kopfrechnen lässt sich mit nur geringem Übungseinsatz eine Reihe von Rechenkniffen erobern. Viele Kinder greifen sie gerne auf, weil sie dann bei manchen Rechnungen blitzschnell zum Ergebnis kommen. Wenn es gelänge, die ganze Klasse für das *Blitzrechnen* zu begeistern, würde dies natürlich den Unterricht ungemein aufmuntern und mit Fröhlichkeit durchstrahlen. Einige der gebräuchlichsten Regeln sollen daher zur Verwendung empfohlen werden, auch weil altersmäßig sie gut passen und häufig angewandt werden können. Die ausführliche mathematische Begründung findet der interessierte Leser im Anhang.

Multiplikation und Division mit 4 oder 8

Beim Kopfrechnen lassen sich Rechnungen mit 4 oder 8 als fortgesetztes Verdoppeln oder Halbieren vereinfachen: Statt 13,5 × 8 arbeiten wir mit 2×2×2 und rechnen 13,5 – 27 – 54 – 108; statt 1,56 : 4 rechnen wir 1,56 × ½ × ½ , also 1,56 – 0,78 – 0,39 ; bei Division durch 8 würden wir noch eine Halbierung anschließen auf 0,195.

Multiplikation und Division mit 5

Bereits am Beginn des Abschnitts über die Dezimalzahlen wurde innerhalb einer Übungsaufgabe das bequeme Rechnen mit 5 verraten: „Ich muss nur halbieren und dann eine Stelle größer anhängen. So geht es bei 12 · 5 = ? – Erst die 12 halbieren: 6; Null dran: 60; also ist 12 · 5 = 60!“ Dies wurde oben bei den Vorschlägen zum Kopfrechnen nochmals aufgegriffen und könnte zwischenzeitlich den Schülern geläufig sein.

Den Grund dafür ist sofort erkennbar, wenn 5 als 10/2 umgedeutet wird und mit den getrennten Operationen 10-mal und ½-mal durchgeführt wird. Genauso geht es mit der Division durch 5. Sie wird ersetzt durch „mal 1/5“ oder „mal 2/10“ und getrennt in 2-mal, ergänzt um eine (Komma-)Stellenverschiebung durchgeführt. Bei 12 : 5 führt der Weg über verdoppeln auf 24 und Stellenverschiebung zu 2,4.

[63] Der Lehrer findet geeignete Zahlen für eigene Aufgaben zum fortgesetzten Dritteln aus Vielfachen von 3er-Potenzen (3; 9; 27; 81; 243; 243; 729; 6561 usw.), zum Halbieren aus 2er-Potenzen (2; 4; 8; 16; 32; 64; 128, 256, 512, 1024, ...) so kann beispielsweise 7×729 = 5103 sechsmal gedrittelt werden, bis erst ein Bruch entsteht.

Multiplikation und Division mit 25

Auf dem gleichen Prinzip beruht der Ersatz von 25 durch 100/4 als Operator. Dadurch kann man 68 × 25 ersetzen durch zweimaliges Halbieren von 68 über 34 auf 17, der Faktor ×100 wird durch Stellenverschiebung nachgetragen zum Ergebnis 1700. Die Division 35 : 25 umgeht man mit Verdoppeln 35 – 70 – 140 und anschließender Stellenverschiebung auf 1,4.

Erfahrungsgemäß gerät der Umgang mit dieser Rechenmöglichkeit meist wieder rasch in Vergessenheit, sie wird als umständlich empfunden und wird auch zu selten gebraucht. Es ist also fraglich, ob sich der Hinweis und die entsprechend nötige Übung im Unterricht sinnvoll sind. Eine weitere Ausdehnung darüber hinaus auf 125 findet noch sich im Anhang.

Multiplikation mit 11

Von der zu multiplizierenden Zahl schreibt man für das Ergebnis (von rechts schreiben, also genügend Platz lassen) die letzte Ziffer (die Einer) der Zahl hin und schreibt links daneben der Reihe nach die Summe zweier aufeinanderfolgender Ziffern. Am Ende fügt man noch die erste Ziffer an.

Beispiel: 3451 × 11 = ?		3	4	5	1	
Rechenschritte:		3	3+4	4+5	5+1	1
	=	3	7	9	6	1

Die Zwischenzeile muss wohl kaum extra geschrieben werden, sie soll nur einmalig das Verfahren sichtbar machen.

Manchmal die Summe zweier benachbarter Ziffern größer als 9, dann ergibt sich dabei Übertrag: 256 × 11 = $27_{1}16$ = 2816. Dieser wird wie bei normalen Rechnungen einfach dazu gefügt.

Multiplikation zwischen 10 und 20

Für diese spezielle Zahlenkombination gibt es eine bequeme Abkürzung, welche schnelle Kopfrechnungen ermöglicht: Addiere zur ersten Zahl die Einer der zweiten; das gibt die Zehner fürs Ergebnis, hänge also eine Null daran. Nimm dann die Einer der beiden Zahlen mal und füge es dazu:

12 · 14 = ?   12 + 4 = 16 → 160   2 · 4 = 8   160 + 8 = 128 (= 12 · 14)

Bei größeren Zahlen gibt es einen Übertrag:

16 · 19 = ?   16 + 9 = 25 → 250   6 · 9 = 54   250 + 54 = 304 (= 16 · 19)

Multiplikation mit 9 oder 19 oder 18

Weil die Einer-Endung 9 um 1 unter 10 (oder 20) liegt, braucht man vom 10fachen (20fachen) nur das Einfache abzuziehen:

16 · 19 = ?   16 → 32 → 320   320 – 16 = 304 (= 16 · 19)

37 · 9 = ?   37 → 379   379 – 37 = 342 (= 37 · 9)

Bei ×18 nehmen wir vom 20fachen das bereits bekannte Zweifache ab:

16 · 18 = ?   16 → 32 → 320   320 – 32 = 304 (= 16 · 19)

Im Prinzip lässt sich das auf viele Multiplikatoren übertragen, doch wirklich praktisch ist es neben den oben genannten Fällen nur noch, wenn sich Verdoppeln und Stellenverschiebung geschickt kombinieren lässt, also bei ×39 ; ×38 ; ×79 ; ×78 ; ×99 ; ×98 ; ×199 ; ×198 ; diese Zahlenturnen wird aber nicht mehr alle Kinder erreichen oder auch rasch wieder in Vergessenheit geraten:

17 · 38 = ?   17 → 34 → 68 → 680   680 – 34 = 646   = 17 · 38

23 · 198 = ?   23 → 46 → 4600   4600 – 46 = 4554   = 23 · 198

Nimm mal die Finger mal!

Als fröhliches Bonmont kann noch die Finger-Multiplikation von Zahlen zwischen 5 und 10 angefügt werden: Eine leere Hand mit eingewinkelten Fingern bedeutet 5, werden 2 Finger ausgestreckt bedeutet dies 7. Zeigt nun die andere Hand 4 Finger, so ist dort die 9 gemeint. Das Produkt 7 × 9 entsteht durch richtiges Deuten der Fingerzeige. Aus der Summe aller ausgestreckten Finger an beiden Händen entsteht der Zehnerbeitrag zum Ergebnis, das sind hier 2 + 4 Finger, also 60. Dazu kommt das Produkt der eingewinkelten Finger mit 3 × 1 = 3. Zusammen ergibt sich das Ergebnis 7 × 9 = 63

Bequemrechnen

Beim schriftlichen Rechnen kommen gelegentlich Ziffern als Wiederholung oder als Verdopplung vor. Es lohnt sich, die Kinder auf die mögliche Abkürzung hinzuweisen, indem sie das bereits bekannte Ergebnis einer Vorzeile beachten. Besonders bei der Division kann die Kenntnis von Vorergebnissen eine wertvolle Hilfe sein.

Bei 354 × 214 = ? entsteht die erste Zeile durch Verdoppeln (708), die zweite Zeile übernimmt die Ausgangszahl (354), die dritte Zeile ist das Doppel der ersten (1416):

$$\begin{array}{l} \underline{354 \times 214} \\ \quad 708 \\ \quad\ \ 354 \\ \quad\ \ 1416 \end{array}$$

Noch nicht bearbeitet:

Vom Formenzeichnen zur Geometrie

In der 4. Klasse beginnt die Formenlehre sich in eine Fortsetzung des künstlerisch gestalteten Formenzeichnens und in eine elementare Freihandgeometrie zu gliedern. Man kann auch, wie Hermann von Baravalle schrieb, es so sehen, dass die Geometrie aus dem künstlerischen Formenzeichnen herauswächst.[64] Wie das Formenzeichnen in Flechtbandformen fortgesetzt werden kann, habe ich in dem Büchlein XXX dargestellt.[65] Neben der Schulung für ein künstlerisches Formempfinden wird damit zugleich ein dreidimensionales Vorstellungsvermögen geschult. Für einen propädeutischen Geometrieunterricht in der 4. und 5. Klasse liegt das Büchlein XXX vor.[66] In ihm beginnt durch das Ordnen, systematische Beschreiben einfacher geometrischer Formen und nicht zuletzt durch erste geometrische Konstruktionen das Aufleuchten kausalen Denkens berücksichtigt.

Abschluss / Rückblick Kl. 4

Vgl. mit Hinweisen am Ende des Kapitels „gemeine Brüche“
Bemerk. Ende 4: Verhältnisse usw. sind typisch für Kl.5 – in 4 genügt ein erstes Empfinden als Vorbereitung, wichtiger: Dezimal schriftl. Division; im Blick: Steiners Forderung nach freiem Umgang bis Ende 5 erreichen, also nur teilweise in 4 erreichbar
Was sollte erreicht sein? / was kann (in anderer Form?) nach- / auf-geholt werden?

---

64 Siehe Hermann von Baravalle, Das Hervorgehen des Wissenschaftlichen aus dem Künstlerischen, xxx?

65 Siehe Ernst Schuberth, xxx

66 Siehe Ernst Schuberth, xxx